INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 14 februarie 2015

Barem clasa a XI-a

Notă: Orice altă rezolvare corectă se notează cu punctajul maxim corespunzător problemei.

PROBLEMA 1

Rezolvaţi ecuaţia $X^3 = \begin{pmatrix} 76 & 49 \\ 49 & 76 \end{pmatrix}$, $X \in M_2(\mathbb{R})$.

(Autor prof. Fărcaş Nicolae, Colegiul Naţional „Silvania” Zalău)

Soluţie

Deoarece $X^3 \cdot X = X \cdot X^3$, avem:

$$\begin{cases} X^3 \cdot X = \begin{pmatrix} 76 & 49 \\ 49 & 76 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76a+49c & 76b+49d \\ 49a+76c & 49b+76d \end{pmatrix} \\ X \cdot X^3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 76 & 49 \\ 49 & 76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76a+49b & 49a+76b \\ 76c+49d & 49c+76d \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=d \\ b=c \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$ …… *2 puncte*

Se arată prin inducţie că $X^n = \begin{pmatrix} \dfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} & \dfrac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} \\ \dfrac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} & \dfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} \end{pmatrix}, n \geq 1$ ……….. *3 puncte*

Pentru $n = 3$ avem $X^3 = \begin{pmatrix} \dfrac{(a+b)^3+(a-b)^3}{2} & \dfrac{(a+b)^3-(a-b)^3}{2} \\ \dfrac{(a+b)^3-(a-b)^3}{2} & \dfrac{(a+b)^3+(a-b)^3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 & 49 \\ 49 & 76 \end{pmatrix}$

Obţinem $\begin{cases} (a+b)^3+(a-b)^3 = 152 \\ (a+b)^3-(a-b)^3 = 98 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ a-b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$, deci $X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ……….. *2 puncte*

PROBLEMA 2

Fie $A \in M_2(C)$ cu $tr(A) = 1$ şi $\det(A) = 2$. Demonstraţi că $\det(A^2 - I_2) + \det(A^2 + I_2) + \det(A^2 + 2I_2) = 12$.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

(Selectată de prof. Haiduc Sorina, Colegiul Naţional „Simion Bărnuţiu" Şimleu Silvaniei)

Soluţie

Fie $f_A(x)=\det(A-xI_2)=x^2-(TrA)x+\det A$, de unde rezultă

$f_A(x)=x^2-x+2$, polinomul caracteristic al matricei A .... *1 punct*

$A^2-A+2I_2=O_2 \Leftrightarrow A^2+2I_2=A$ (1) .... *1 punct*

Din (1) rezultă $\det(A^2+2I_2)=\det A=2$ (2) .... *1 punct*

Folosind (1) rezultă $A^2+I_2=A-I_2$, de unde obţinem

$\det(A^2+I_2)=\det(A-I_2)=f_A(1)=2$ (3) .... *2 puncte*

Dar $\det(A^2-I_2)=\det(A-I_2)\cdot\det(A+I_2)$ şi $\det(A+I_2)=f_A(-1)=4$ (4)

Din (3) şi (4) obţinem $\det(A^2-I_2)=2\cdot 4=8$ (5) .... *1 punct*

Din $(2),(3)$ şi (5) obţinem $\det(A^2-I_2)+\det(A^2+I_2)+\det(A^2+2I_2)=12$ .... *1 punct*

PROBLEMA 3

Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\in N}$ definit prin relaţia $a_{n+1}+a_{n-1}=\sqrt{2}\cdot a_n$, $n\geq 1$ este periodic (adică, există $k\in N$ astfel încât $a_{n+k}=a_n$, $\forall n\in N$).

(propus de prof. Opriş Adonia – Colegiul Tehnic „Alesandru Papiu Ilarian" Zalău)

Soluţie

Ecuaţia recurenţei: $t^2-\sqrt{2}t+1=0$ are rădăcinile nereale $t_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, t_2=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ...*2 puncte*

În acest caz termenul general are froma $a_n=\alpha_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n+\beta_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$. ……… *2 puncte*

Aplicând formula lui Moivre, termenul general se scrie:

$$a_n=\alpha_1\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)+\beta_1\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)=(\alpha_1+\beta_1)\cos\frac{n\pi}{4}+i(\alpha_1-\beta_1)\sin\frac{n\pi}{4}.$$

…………………………………………………………………………….…..*2 puncte*

Deducem că $a_{n+8}=a_n$ deci şirul este periodic... *1 punct*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

PROBLEMA 4

Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ definite prin $a_0 = b_0 = 1$ și $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = (n^2 + n + 1)a_n + b_n$, $\forall n \geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sqrt[n]{\dfrac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n}}$.

(G.M. B-1/2014)

Soluţie

Deoarece $b_n = a_{n+1} - a_n$ rezultă

$$a_{n+2} - a_{n+1} = b_{n+1} = (n^2+n+1)a_n + b_n = (n^2+n+1)a_n + a_{n+1} - a_n, \ldots\ldots\ldots \textit{ 1 punct}$$

deci $a_{n+2} = 2a_{n+1} + n(n+1)a_n$ ……………………………….. *1 punct*

$a_0 = a_1 = 1$. Arătăm prin inducţie $a_n = n!$. Presupunem $a_n = n!$ şi $a_{n+1} = (n+1)!$ ……….*1 punct*

Atunci $a_{n+2} = 2(n+1)! + n(n+1)n!$, de unde $a_{n+2} = (n+2)!$ …………………………*1 punct*

$b_n = (n+1)! - n! \Rightarrow b_n = n \cdot n! \Rightarrow \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{1}{n} \Rightarrow \dfrac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n} = \dfrac{1}{n!}$, deci

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sqrt[n]{\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textit{1 punct}$$

Folosind criteriul radicalului pentru şirul $x_n = \dfrac{n^n}{n!}$, $n \geq 1$ obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \ldots\ldots\ldots\ldots \textit{2 puncte}$$