# Olimpiada Naţională de Matematică
# Etapa locală -14.02.2015
# Clasa a XI-a $M_1$

**Problema 1**

Determinaţi $a,b,c\in\mathbb{R}$, pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{an^2+bn+c}-2n-3\right)=2015.$

**Problema 2**

Determinați valorile parametrului real $a$, astfel încât funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+a^2x+2a}$ să aibă o singură asimptotă verticală.

**Problema 3**

Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 7 & 18 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. Rezolvați ecuația $X^2=A$, $X\in M_2(\mathbb{R})$.

**Problema 4**

Fie matricele $A,B\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det A=\det(A+B)=1$ și $\det(A-B)=3$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\det(A+xB)$

a) Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\det A+\alpha\cdot x+\det B\cdot x^2$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

b) Aflați $\alpha$ și $\det B$.

**Notă**

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

# Olimpiada Naţională de Matematică
# Etapa locală -14.02.2015
# Clasa a XI-a $M_1$
## Soluții și bareme

**Problema 1**

Notăm limita cu $l$.

$l=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left[\sqrt{a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}}-\left(2+\frac{3}{n}\right)\right]\Rightarrow$ pt $\sqrt{a}-2\neq 0\Rightarrow l=\pm\infty\neq 2015$, nu convine $\Rightarrow \sqrt{a}=2\Rightarrow a=4$ ..**2p**

$$l=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{\cancel{4n^2}+bn+c-\cancel{4n^2}-12n-9}{\sqrt{4n^2+bn+c}+2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-12)n^2+(c-9)n}{n\left(\sqrt{4+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}}+2+\frac{3}{n}\right)},\ \text{pt } b-12\neq 0\Rightarrow l=\pm\infty\neq 2015$$

nu convine $\Rightarrow b=12$ ……………………………………………………………………………………**3p**

$l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(c-9)\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{4+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}}+2+\frac{3}{n}\right)}=\dfrac{c-9}{4}\Rightarrow\dfrac{c-9}{4}=2015\Rightarrow c=8069$ ………………..…………………**2p**

**Problema 2**

Funcția $f:D\to\mathbb{R}$ are o singură asimptotă verticală $\Leftrightarrow$ **1)** ecuația $x^2+a^2x+2a=0$ are soluție unică sau 2) ecuațiile $x^2+a^2x+2a=0$ și $x^2-5x+4=0$ au o unică rădăcină reală comună………..………**2p**

**1)** $\Delta=0\Leftrightarrow a^4-8a=0\Leftrightarrow a\left(a^3-8\right)=0\Rightarrow a_1=0, a_2=2$

Pt $a=0\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty\Rightarrow x=0$ unica asimptotă verticală………**1p**

Pt $a=2\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{(x+2)^2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\infty\Rightarrow x=-2$ unica asimptotă verticală…...**1p**

**2)** $x^2-5x+4=0\Rightarrow x_1=1, x_2=4$. Dacă $x_1=1$ rădăcina comună $\Rightarrow 1+a^2+2a=0\Rightarrow(a+1)^2=0\Rightarrow a=-1$

$\Rightarrow f:\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+x-2}=\dfrac{x-4}{x+2}\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=-\infty$ și $\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=\infty$

$\Rightarrow x=-2$ este unica asimptotă verticală…………………………………………………….………**2p**

Dacă $x_2=4$ este rădăcina comună $\Rightarrow 16+4a^2+2a=0\Rightarrow\Delta<0\Rightarrow a\in\varnothing\Rightarrow a\in\{0,2,-1\}$ soluție…....**1p**

**Problema 3**

Fie matricea $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ soluție a ecuației $X^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$ …………………**1p**

$\Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=7 \\ b(a+d)=18 \\ c(a+d)=-4 \\ d^2+bc=7 \end{cases}$ $\Rightarrow$ scăzând ec 1 și 3 obținem $(a-d)(a+d)=0$, dar $a+d\neq 0 \Rightarrow a=d$ …………**2p**

Ecuațiile 2 și 3 conduc la $b=\frac{9}{a}$, $c=-\frac{2}{a}$ $\Rightarrow$ în ec1 avem $a^2-\frac{18}{a^2}=7 \Rightarrow a_1=3$, $a_2=-3$ …………..…**2p**

Pt $a=3 \Rightarrow d=3, b=3, c=-\frac{2}{3} \Rightarrow X_1=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -\frac{2}{3} & 3 \end{pmatrix}$ și pt $a=-3=d \Rightarrow b=-3, c=\frac{2}{3} \Rightarrow X_2=\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ \frac{2}{3} & -3 \end{pmatrix}$..**2p**

**Problema 4**

**a)** Verificare prin calcul direct…………………………………………………………..**3p**

**b)** $\begin{cases} f(1)=\det(A+B)=1 \Rightarrow 1+\alpha+\det B=1 \\ f(-1)=\det(A-B)=3 \Rightarrow 1-\alpha+\det B=3 \end{cases}$ ……………………………………………………..**2p**

$\Rightarrow$ scăzând relațiile obținem $\alpha=-1$ și apoi $\det B=1$ ……………………………………………….**2p**

.