MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN TIMIŞ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 09.02.2013

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE CLASA A IX-A MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

Subiectul 1:

a) Notează $\frac{x-n-1}{n}=k, k\in Z$ 1p

Obține $\left[\frac{kn+1}{n+1}\right]=k$ 1p

Obține $k\in(-n;1]$, deci sunt $n+1$ soluții..1p

b) Deduce că $x\in Z$ 1p

Ecuația devine: $\left[\frac{x+1}{3}\right]+\left[\frac{x+2}{3}\right]+\left[\frac{x+3}{3}\right]=x+1$..1p

Foloseşte identitatea lui Hermite...1p

Finalizare $x\in Z$ 1p

Subiectul 2:

a) Scrie inegalitatea în forma $a^2(a-b)+b^2(b-a)\geq 0$ 1p

Obține $(a-b)^2(a+b)\geq 0$ 1p

Finalizare…………………………………………………………………………………….1p

b) Foloseşte inegalitatea de mai sus pentru $a\to\sqrt{a}, b\to\sqrt{b}$ …………………………………1p

Obține $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+\sqrt{abc}\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a}+\sqrt{abc}$ ……………………………...………1p

Deduce că $\frac{1}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+\sqrt{abc}}\leq\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}$…………………………..……..1p

Finalizare…………………………………………………………………………………….1p

Subiectul 3:

a) foloseşte inducția matematică. Verificare…………………………………………….…………1p

Scrie relația în forma $x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right)$ ………………...2p

Finalizare……………………………………………………………………………………1p

b) In relația anterioară consideră $x = 2 + \sqrt{3}$ …………………………………………………..1p

Obține că $\frac{1}{x} = 2 - \sqrt{3}$ ………………………………………………………………………1p

Finalizare……………………………………………………………………………………1p

Subiectul 4:

a) Demonstrează relația ……………………………………………………………………..3p

b) Aplică teorema lui Menelaus in triunghiul BEC si transversala $E - F - C$ …….…………3p

Obține $\alpha = -\frac{3}{4}$ ………………………………………………………………...……..1p

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 09.02.2013
SUBIECTE - clasa a IX-a matematică-informatică:

1.

a) Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei :

$$\left[\frac{x-n}{n+1}\right]=\frac{x-n-1}{n}, n\in N^{*} \text{ fixat,}$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a

b) Să se rezolve ecuaţia:

$$\left[\frac{[x+1]}{3}\right]+\left[\frac{[x+2]}{3}\right]+\left[\frac{[x+3]}{3}\right]=x+1,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

2.

a) Să se demonstreze inegalitatea:

$$a^{3}+b^{3}\geq a^{2}b+ab^{2}, \forall a,b>0;$$

b) Folosind eventual subpunctul a) demonstraţi inegalitatea:

$$\frac{1}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+\sqrt{abc}}+\frac{1}{b\sqrt{b}+c\sqrt{c}+\sqrt{abc}}+\frac{1}{c\sqrt{c}+a\sqrt{a}+\sqrt{abc}}\leq\frac{1}{\sqrt{abc}}, \forall a,b,c>0$$

3.

a) Să se demonstreze că dacă $x\in R^{*}$ si $x+\frac{1}{x}\in Z$ atunci $x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\in Z, \forall n\in N$;

b) Să se demonstreze că $\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}\in Z, \forall n\in N$.

4.

Fie triunghiul ABC si $D\in(BC)$ astfel încat $BD=2DC$. Notăm cu E mijlocul segmentului AB, iar cu F mijlocul medianei din C .

a) Să se arate că dacă $M\in(BC)$ astfel încat $\frac{BM}{MC}=k$, atunci are loc relaţia:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{1+k}\overrightarrow{AC};$$

b) Să se demonstreze că punctele A,F,D sunt coliniare şi să se determine $\alpha\in R$ astfel încat $\overrightarrow{AF}=\alpha\overrightarrow{DA}$.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

succes!

prof.Zeno Blajovan, inspector de specialitate - I.S.J. Timiş