Olimpiada de matematică
Faza locală - 20 februarie 2015

Clasa a XII-a

1. Să se calculeze

(i) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$, *pentru* $x \in (0,1)$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

2. (i) Să se determine subgrupurile grupului $(\mathbb{Z},+)$.

(ii) Fie $f:\mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_9$ definită prin $f(x)=x^2$ pentru orice $x \in \mathbb{Z}_9$. Să se determine submulțimile $A \subseteq \mathbb{Z}_9$ astfel ca $f(A)=A$.

GM 2014

3. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție integrabilă și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcția definită prin $g(a)=\int_0^1 |x-a|\cdot f(x)\,dx$ pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

(i) Să se arate că există $L \geq 0$ astfel ca $|g(a)-g(b)| \leq L\cdot|a-b|$ pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$.

(ii) Dacă $f(x)\geq 0\ \ \forall x\in[0,1]$, să se arate că funcția g este convexă.

4. Fie $(R,+,\cdot)$ un inel și $Z(R)=\{a\in R : a\cdot y = y\cdot a, \forall y \in R\}$.

(i) Să se arate că $\forall a,b \in Z(R) \Rightarrow a-b,\ a\cdot b \in Z(R)$;

(ii) Demonstrați că dacă $x^2-x\in Z(R)$ pentru orice $x\in R$, atunci inelul $(R,+,\cdot)$ este comutativ.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală - 20 februarie 2015

Clasa a XII-a Barem

1.

(i) Integrăm prin părți și obținem $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\arcsin x + \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ **2p**

Se efectuează schimbarea de variabilă $\frac{1}{x} = t$ **1p**

Finalizare **1p**

(ii) $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ **2p**

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$ **1p**

2. **(i)** $H \le \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}$ astfel ca $H = n\mathbb{Z}$

$H \le \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}$ astfel ca $H = n\mathbb{Z}$ **3p**

$H = n\mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad H \le \mathbb{Z}$ **1p**

(ii) $\forall x \in \mathbb{Z}_9 \quad f(x) \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}, \hat{7}\}$ **1p**

Finalizare **2p**

3.

(i) Fie $a,b \in \mathbb{R}$, atunci

$|g(a)-g(b)| = \left|\int_0^1 |x-a|\cdot f(x)\,dx - \int_0^1 |x-b|\cdot f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 (|x-a|-|x-b|)\cdot f(x)\,dx\right| \le \int_0^1 \big||x-b|-|x-b|\big|\cdot|f(x)|\,dx$ **2p**

Fie $L = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$.

Atunci $|g(a)-g(b)| \le L\cdot\int_0^1 \big||x-b|-|x-b|\big|dx \le L\cdot\int_0^1 |a-b|dx = L\cdot|a-b|$ **2p**

(ii) Fie $t \in [0,1]$ și $a,b \in \mathbb{R}$, atunci pentru orice $x \in [0,1]$ are loc

$|x-ta-(1-t)b| = |tx+(1-t)x-ta-(1-t)b| = |t(x-a)+(1-t)(x-b)| \le t|x-a|+(1-t)|x-b|$ **1p**

Cum $f(x) \ge 0, \forall x \in [0,1]$, din inegalitatea de mai sus deducem că

$|x-ta-(1-t)b|f(x) \le t|x-a|f(x)+(1-t)|x-b|f(x), \forall x \in [0,1]$ și concluzia se impune. **2p**

4.

(i) Fie $a,b \in Z(R)$ și $y \in R$, atunci $(a-b)\cdot y = a\cdot y - b\cdot y = y\cdot a - y\cdot b = y\cdot(a-b)$, adică $a-b \in Z(R)$ **1p**

$(a\cdot b)\cdot y = a\cdot(b\cdot y) = a\cdot(y\cdot b) = (a\cdot y)\cdot b = (y\cdot a)\cdot b = y\cdot(a\cdot b) \Rightarrow a\cdot b \in Z(R)$ **2p**

(ii) Fie $x, y \in R$, atunci $x^2 - x, y^2 - y, (x+y)^2 - (x+y) \in Z(R)$, dar

$(x+y)^2 - (x+y) = x^2 - x + y^2 - y + x \cdot y + y \cdot x$ **1p**

și din (i) obținem $x \cdot y + y \cdot x \in Z(R)$. **1p**

Atunci $x \cdot (x \cdot y + y \cdot x) = (x \cdot y + y \cdot x) \cdot x$, adică $x \cdot y \cdot x + y \cdot x^2 = x^2 \cdot y + x \cdot y \cdot x \Leftrightarrow x^2 \cdot y = y \cdot x^2$. **1p**

De unde $x^2 \in Z(R)$ și din (i) obținem $x \in Z(R) \Rightarrow x \cdot y = y \cdot x$ **1p**