Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -14.02.2015
Clasa a X-a M_1

Problema 1

Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația: $\log_3\left(8+2x-x^2\right)=2^{x-1}+2^{1-x}$.

Problema 2

Dacă $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ și $\dfrac{z^2+z+1}{z^2-z+1}\in\mathbb{R}$, arătați că $|z|=1$.

Problema 3

Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația : $\sqrt{x-2}+\sqrt[3]{4-x}=2$.

Problema 4

Să se determine toate funcțiile $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ care verifică relația:

$$x^2+2f(xy)+y^2=f^2(x+y)\quad \forall x,y\in\mathbb{N}.$$

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -14.02.2015
Clasa a X-a M_1
Soluții și bareme

Problema 1

CE: $-x^2+2x+8>0 \Rightarrow x\in(-2,4)$ **1p**

Pt $x\in(-2,4) \Rightarrow -(x^2+2x+8)\in(0,9] \Rightarrow \log_3(-x^2+2x+8)\le \log_3 9=2$ **2p**

Dar , aplicând inegalitatea mediilor , $2^{x-1}+2^{1-x}\ge 2\sqrt{2^{x-1}\cdot 2^{1-x}}=2$ **2p**

Deci egalitatea poate avea loc doar pt $\log_3(-x^2+2x+8)=2^{x-1}+2^{1-x}=2$ **1p**

Soluția este x=1 .... **1p**

Problema 2

$A=\dfrac{z^2+z+1}{z^2-z+1}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow A=\overline{A} \Leftrightarrow \dfrac{z^2+z+1}{z^2-z+1}=\dfrac{\overline{z}^2+\overline{z}+1}{\overline{z}^2-\overline{z}+1}$ (1)........................ **2p**

Prelucrând relația (1) și folosind $z\cdot\overline{z}=|z|^2 \Rightarrow 2(z-\overline{z})(|z|^2-1)=0$ **4p**

Cum $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \Rightarrow (z-\overline{z})\ne 0$, deci $|z|^2=1$ și cum $|z|\ge 0 \Rightarrow |z|=1$........................ **1p**

Problema 3

CE: $x\ge 2 \Rightarrow x\in[2,\infty)$,notăm $\sqrt{x-2}=u\ge 0$ și $\sqrt[3]{4-x}=v \Rightarrow u+v=2 \Rightarrow u=2-v$ (1)............ **2p**

$\begin{cases} u^2=x-2 \\ v^3=4-x \end{cases} \Rightarrow u^2+v^3=2$ (2).. **1p**

Din (1) și (2) $\Rightarrow v^3+v^2-4v+2=0 \Leftrightarrow (v-1)(v^2+2v-2)=0 \Rightarrow v_1=1, v_2=-1+\sqrt{3}, v_3=-1-\sqrt{3}$ **2p**

$u_1=1 \Rightarrow x_1=3\ge 2; u_2=3-\sqrt{3} \Rightarrow x_2=14-6\sqrt{3}\ge 2, u_3=3+\sqrt{3} \Rightarrow x_3=14+6\sqrt{3}\ge 2$ **2p**

Problema 4

Pt x=y=0 $\Rightarrow 2f(0)=f^2(0) \Rightarrow f(0)=0$ sau $f(0)=2$ **2p**

Pt y=0 $\Rightarrow x^2+2f(0)=f^2(x), \forall x\in\mathbb{N}$,dar $f(x)\in\mathbb{N}$ pt $\forall x\in\mathbb{N} \Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+2f(0)}$ **3p**

Pt $f(0)=0 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2}=|x|=x, \forall x\in\mathbb{N}$,deci $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(x)=x, \forall x\in\mathbb{N}$ soluție................ **1p**

Pt $f(0)=2 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+4}, \forall x\in\mathbb{N}$, dar pt x=1 $\Rightarrow f(1)=\sqrt{5}\notin\mathbb{N}$, deci nu convine................ **1p**