OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
15 februarie 2015

CLASA a XI-a

1. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det A = \det B = 1$. Demonstraţi că $Tr\left(A^{-1}B - AB^{-1}\right) = 0$.

2. Fie A o matrice pătratică cu elemente întregi având determinantul egal cu 2. Să se demonstreze că cel puţin un complement algebric al matricei A este număr întreg impar.

3. Se consideră şirul de numere reale strict pozitive $\left(y_n\right)_{n\geq 1}$ aşa încât există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n} = \ell,\ \ell \in (0,\infty)$.
Dacă şirul $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ este definit prin $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\sqrt[n]{y_n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1 > 0$ dat, să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = \frac{1}{\ell}.$$

4. Fie şirul de numere reale $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$, astel încât $x_0 = a > 0$ şi $x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
Să se studieze existenţa limitei şirului $(y^n x_n)_{n\geq 1}$, unde y este număr real fixat.
Este posibil ca limita șirului $(y^n x_n)_{n\geq 1}$ să fie 2015?

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.