INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN GALAŢI
Str.Portului Nr.55 B ☎ 0372362000; 0372362001 🖷 0236319396
E-mail: info@isj.gl.edu.ro; Adresă site: www.isj.gl.edu.ro

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie 2016

Clasa a IX-a

Problema 1.

Să se demonstreze că numărul 13^n+7^n-2 este divizibil cu 9, $(\forall)n\in\mathbb{N}$.

Problema 2.

Să se demonstreze că numerele $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{15}$ nu se pot găsi printre termenii unui şir $(a_n)_{n\geq 1}$, unde $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

Problema 3.

Să se determine numerele reale $x,\ y$ care verifică egalitatea $|x+y|\cdot\left[\dfrac{6\cdot x}{x^2+9}\right]=2016$, unde prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a.

Problema 4.

Se consideră pătratul ABCD şi un punct E pe diagonala BD. Fie P centrul cercului circumscris triunghiului ADE şi S ortocentrul triunghiului AEB. Dacă O este simetricul punctului P faţă de AE, să se demonstreze că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OS}$.

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie-2016

Clasa a IX-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	Demonstrăm prin inductie matematică: $P(n):\ \left(13^n+7^n-2\right)\vdots 9,\ (\forall)n\in\mathbb{N}$ I. $P(0): 13^0+7^0-2=0\vdots 9\ (A)$; II.$P(n)\to P(n+1),(\forall)n\in\mathbb{N}$; $P(n+1): \left(13^{n+1}+7^{n+1}-2\right)\vdots 9$ $13^{n+1}+7^{n+1}-2=13^n\cdot 13+7^n\cdot 13-26-7^n\cdot 6+24=13\cdot\underbrace{\left(13^n+7^n-2\right)}_{\vdots 9}-6\cdot\left(7^n-4\right)$; $6\cdot\left(7^n-4\right)\vdots 3\ (1)$ $7^n-4=(6+1)^n-4=M_3+1-4=M_3-3=M_3\Rightarrow\left(7^n-4\right)\vdots 3,\ (\forall)n\in\mathbb{N}\ (2)$ Din 1 şi 2 $\Rightarrow 6\cdot\left(7^n-4\right)\vdots 9,(\forall)n\in\mathbb{N}$; Aşadar $P(n+1)$ este adevărată; Conform principiului inducţiei matematice $\Rightarrow P(n)$ este propoziţie adevărată, $(\forall)n\in\mathbb{N}$	 **1p** **1p** **1p** **2p** **1p** **1p**
2.	Presupunem prin metoda reducerii la absurd că există m, n, p $\in\mathbb{N}^*$, m<n<p, astfel încât $\sqrt{11}=a_m=a_1+(m-1)\cdot r$ $\sqrt{13}=a_n=a_1+(n-1)\cdot r$ $\sqrt{15}=a_p=a_1+(p-1)\cdot r$, r>0 este raţia progresiei aritmetice. $\begin{cases}\sqrt{13}-\sqrt{11}=(n-m)\cdot r\\ \sqrt{15}-\sqrt{11}=(p-m)\cdot r\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{\sqrt{15}-\sqrt{11}}=\dfrac{n-m}{p-m}\overbrace{\overset{not}{=}q\in\mathbb{Q}_+^*}\Rightarrow\sqrt{13}-\sqrt{11}=q\cdot\sqrt{15}-q\cdot\sqrt{11}\Leftrightarrow$ $(q-1)\cdot\sqrt{11}=q\cdot\sqrt{15}-\sqrt{13}\Rightarrow 11\cdot(q-1)^2=15\cdot q^2-2\cdot q\sqrt{195}+13\Leftrightarrow 2\cdot q\sqrt{195}=4\cdot q^2+22\cdot q+2$, de unde, prin împărţire cu $2q\in\mathbb{Q}_+^*$, obţinem: $\sqrt{195}=\dfrac{2\cdot q^2+11\cdot q+1}{q}\in\mathbb{Q}$, contradicţie. Aşadar, presupunerea făcută este falsă, de unde rezultă că numerele $\sqrt{11},\sqrt{13},\sqrt{15}$ nu pot fi printre termenii unei progresii aritmetice.	**2p** **3p** **2p**

3.	Deoarece 2016>0 şi $\left\|x+y\right\| \geq 0 \Rightarrow \left\|x+y\right\| > 0$ şi $\left[\frac{6 \cdot x}{x^2+9}\right] > 0\ (1)$ Dar $x^2+9 \geq \pm 6 \cdot x, (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 \leq \frac{6 \cdot x}{x^2+9} \leq 1 \Rightarrow \left[\frac{6 \cdot x}{x^2+9}\right] \in \{-1,0,1\} (2)$ Din 1 şi 2 $\Rightarrow \left[\frac{6 \cdot x}{x^2+9}\right] = 1 (3)$ Din $\begin{cases} \left[\frac{6 \cdot x}{x^2+9}\right] > 0 \\ \left[\frac{6 \cdot x}{x^2+9}\right] = 1 \\ -1 \leq \frac{6 \cdot x}{x^2+9} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{6 \cdot x}{x^2+9} = 1 \Rightarrow x = 3;$ Ecuaţia devine $\left\|3+y\right\| = 2016 \Rightarrow 3+y = \pm 2016 \Rightarrow y \in \{2013, -2019\};$ Aşadar $(x,y) \in \{(3,2013);(3,-2019)\}$.	**2p** **2p** **1p** **1p** **1p**
4.	Fie Q mijlocul lui $[AE]$. Deoarece P este centrul cercului circumscris triunghiului ADE $\Rightarrow$ PQ este mediatoarea segmentului $[AE]$. Din $O = S_{AE}(P) \Rightarrow$ Q este mijlocul segmentului $[PO]$. Se obține că APEO este romb (1) Deoarece unghiul $\measuredangle ADE$ este înscris în cerc și are $m(\measuredangle ADE) = 45° \Rightarrow m(\measuredangle APE) = 90° (2)$ Din 1 și 2 $\Rightarrow$ APEO este pătrat. $\begin{cases} m(\measuredangle DAP) = 90° - m(\measuredangle BAP) = m(\measuredangle OAB) \\ \text{Din } [AB] \equiv [AD], \text{ respectiv } [OA] \equiv [AP] \end{cases} \Rightarrow \triangle OAB \equiv \triangle PAD \Rightarrow [PA] \equiv [PD] \equiv [OA] \equiv [OB] \equiv [OE] \Rightarrow$ O este centrul cercului circumscris triunghiului $\triangle$AEB, iar din relația lui Sylvester $\Rightarrow \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}$	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p** **2p**