Olimpiada de matematică
Etapa locală, 28.02.2015
Clasa a VIII-a

Subiecte:

1. Se consideră expresia $E(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$.

   a) Arătați că $E(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$.

   b) Arătați că $E(1) + E(2) + E(3) + \ldots + E(2015) = 1 - \frac{1}{2016^2}$.

   c) Calculați $E(1) \cdot [E(1) + E(2)] \cdot [E(1) + E(2) + E(3)] \cdot \ldots \cdot [E(1) + E(2) + E(3) + \cdots + E(2015)]$.

2. Fie $a, b, c \in [1,2]$. Să se arate că:

   a) $(2a - b)(a - 2b) \leq 0$.

   b) $(a + b)\left(\frac{1}{c} + \frac{c}{ab}\right) \in [4,5]$.

3. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel, $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$. În punctul C se ridică perpendiculara pe planul (ABC), pe care se consideră punctul D astfel încât $m(\widehat{DBC}) = 45^\circ$. Determinați măsura unghiului $\widehat{ABD}$.

4. Triunghiul ABC are latura $[BC]$ inclusă intr-un plan α . Știind că $AB = a$, $BC = 2a$, $m(\widehat{ABC}) = 30^\circ$ iar sinusul unghiului plan al diedrului determinat de planele (ABC) și α este egal cu $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, să se determine :

   a) Lungimea segmentului $[AA']$, unde A' este proiecția lui A pe planul α.

   b) Distanța de la A' la planul (ABC).

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.
La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Barem clasa a VIII-a

1.

a) $E(x) = \frac{(x+1)^2 - x^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ ....$1p$

b) $E(1) + E(2) + E(3) + \ldots + E(2015) = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots +$

$+ \frac{1}{2015^2} - \frac{1}{2016^2} == \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2016^2}$..................................$2p$

c) $E(1) \cdot [E(1) + E(2)] \cdot [E(1) + E(2) + E(3)] \cdot \ldots \cdot [E(1) + E(2) + E(3) + \cdots +$

$+E(2015)] = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right)\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2}\right) \ldots \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2016^2}\right)$ ....$2p$

....

$= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{2015 \cdot 2017}{2016^2} = \frac{2017}{4032}$ ....$2p$

2. a) $2a, 2b \in [2,4]$, iar $a, b \in [1,2]$, deci $2a - b \geq 0$, $a - 2b \leq 0$..$3p$

b) Efectuând calculul, $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \in [4,5]$

Folosind inegalitatea $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, x, y > 0$ rezultă $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 4.$ ....$2p$

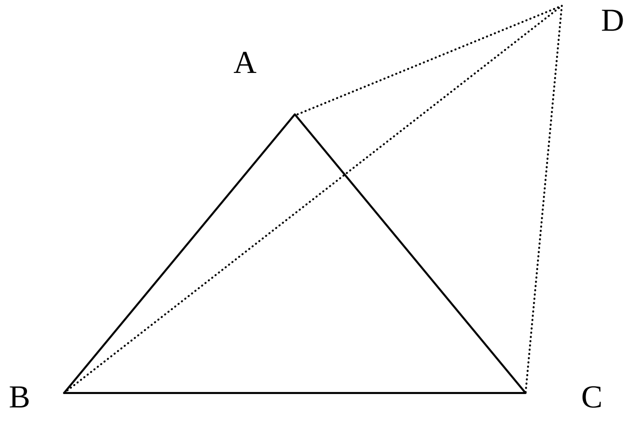
Din inegalitatea de la a) rezultă $2a^2 - 5ab + 2b^2 \leq 0$ sau $\frac{a^2+b^2}{ab} \leq \frac{5}{2}$.......................................$1p$

$\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) = \frac{a^2+c^2}{ac} + \frac{b^2+c^2}{bc} \leq \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5$...$1p$

3. Din teorema celor trei perpendiculare va rezulta $AD \perp AB$...$2p$

Notând $AB = a$ rezultă $BC = a\sqrt{2}$, $DC = BC = a\sqrt{2}$, iar în triunghiul dreptunghic CAD, $AD = a\sqrt{3}$...$3p$

În triunghiul dreptunghic ABD va rezulta $tg\widehat{ABD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$, deci $m(\widehat{ABD}) = 60°$..............$2p$



4. a) Notăm cu D proiecția lui A pe BC.

În triunghiul ABD, $AD = AB\, sin30^{\circ}$, deci $AD = \frac{a}{2}$

În triunghiul ADA', $sin(\widehat{ADA'}) = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{AA'}{\frac{a}{2}}$ și $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ ……………………..$3p$

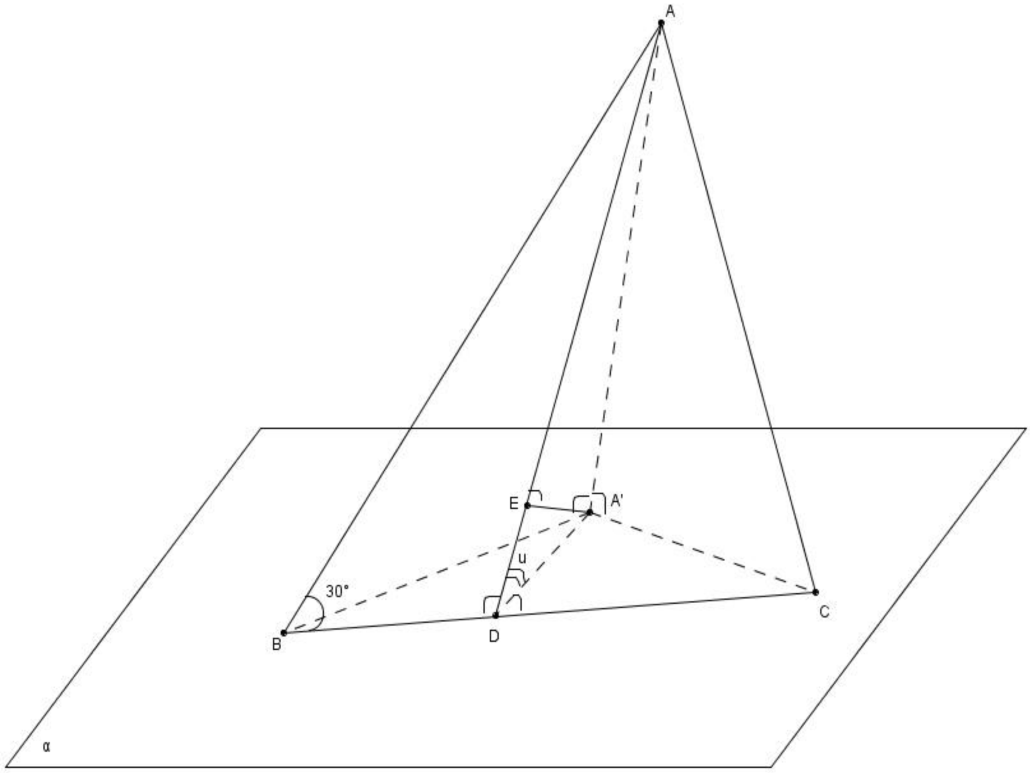
b) În triunghiul dreptunghic ADA' , $AD = \frac{a}{2}$, $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ și va rezulta $A'D = \frac{a}{6}$…………..$1p$

Ducând $A'E \perp AD, E \in (AD)$, va rezulta $A'E \perp (ABC)$, deoarece $A'E$ este perpendiculară și pe BC $(BC \perp (ADA'))$.

Deci $A'E = d(A', (ABC))$, iar în triunghiul dreptunghic ADA', $A'E = \frac{AA' \cdot A'D}{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a}{6}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{9}$

………………………………………………………………………………………..$3p$

(în figură u este măsura unghiului plan al diedrului).



Observație.Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se punctează cu punctajul maxim acordat.