MINISTERUL EDUCATIEI, CERCETARII, TINERETULUI SI SPORTULUI

INSPECTORATUL SCOLAR AL JUDETULUI VRANCEA

CentrulMetodic -Panciu

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA ZONALĂ – 9 FEBRUARIE 2013

CLASA A X-A

1.Aflați pentru care

2.Dacă demonstrați că .

3.Fie astfel încât

a) Știind că arătați că

b) Dacă și atunci

4.Fie funcția

a) Arătați că f este bijecție.

b)Determinați inversa funcției f.

Propunător, prof. Daniela Gavril, Liceul teoretic *Ioan Slavici* Panciu

MINISTERUL EDUCATIEI, CERCETARII, TINERETULUI SI SPORTULUI

INSPECTORATUL SCOLAR AL JUDETULUI VRANCEA

CentrulMetodic -Panciu

Barem de corectare cls a-X-a

Subiect 1	 Singura soluție x=-1, p=1, corespunzătoare sistemului	2p 2p 1p 2p
Subiect 2	Folosirea inegalității mediilor Finalizare	4p 3p
Subiect 3	1. 2.	1p 1p 1p 1p 1p 1p 1p 1p
Subiect 4		5p 2p

MINISTERUL EDUCATIEI, CERCETARII, TINERETULUI SI SPORTULUI

INSPECTORATUL SCOLAR AL JUDETULUI VRANCEA

CentrulMetodic -Panciu

MINISTERUL EDUCAȚIEI □I CERCETĂRII
COLEGIUL NA□IONAL “AL. I. CUZA”

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală -februarie 2013

Clasa a X-a

1. Sa se rezolve ecuatia : $x^{\log_2 \frac{x}{98}} \cdot 14^{\log_2 7} = 1$

2. Fie $a > \frac{1}{2}$ si multimile $A = \left\{ z \in C \,\middle|\, |z| \le a \right\}, B = \left\{ z \in C \,\middle|\, |z - 1 - i| \le 2a \right\}$. Aratati ca

$\left| \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) \right| \le a\sqrt{2}$, pentru orice $z \in A \cap B$.

3. Rezolvați ecuația : $2^x + 2^{[x]} + 2^{\{x\}} = 3$

4. Fie $z_1, z_2, z_3 \in C^*$ astfel încât $z_1 + z_3 \ne 0$ şi $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_2 + z_3| = |z_1|$. Să se calculeze $\frac{z_1}{z_2 + z_3}$.

Clasa a-X-a Solutii

1. Se logaritmeaza ecuatia in baza 2. Rezulta $\log_2 x \cdot \log_2 \frac{x}{98} + \log_2 14 \cdot \log_2 7 = 0 \Rightarrow$

$\log_2 x\left(\log_2 x - \log_2 98\right) + \left(1 + \log_2 7\right)\log_2 7 = 0$. Notam $\log_2 x = t$ si obtinem ecuatia de gradul al doilea $t^2 - \left(1 + 2\log_2 7\right) \cdot t + \log_2 7 + \log_2^2 7 = 0$, cu discriminantul Δ=1 ;

$t_{1,2} = \frac{1 + 2\log_2 7 \pm 1}{2}$, deci

$x_1 = 7$, $x_2 = 14$

2. Demonstram ca $A \cap B \neq \varnothing$; Evident A este discul de centru O(0) si raza a , iar B este discul
de centru $M\left(1+i\right)$ si de raza $2a$ .Deoarece $MO = \left|1+i\right| = \sqrt{2} < a + 2a$, rezulta ca discurile sunt

secante. Fie $z = |z| \cdot \left(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha\right) \in A \cap B$ .Atunci $\left|\mathrm{Re}\left(z\right) - \mathrm{Im}\left(z\right)\right| = |z| \cdot \left|\cos\alpha - \sin\alpha\right|$, si avem

ca $|z| \leq a$,$\left|\cos\alpha - \sin\alpha\right| \leq \sqrt{2}$, deci$\left|\mathrm{Re}\left(z\right) - \mathrm{Im}\left(z\right)\right| \leq a\sqrt{2}$ .Egalul se realizeaza de exemplu pt.

$z = a \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{4}\right)$, care apartine ambelor multimi din enunt .

3.

a) Dacă x<-1 ➔ [x]≤ -2 ; {x}<1 ➔
$2^x + 2^{[x]} + 2^{\{x\}} < 2^{-1} + 2^{-2} + 2 < 1 + 2 = 3$

b) Dacă $x \geq 1$ ➔ [x]≥ 1 ; {x}≥ 0

➔ $2^x + 2^{[x]} + 2^{\{x\}} > 2^1 + 2^1 + 1 > 3$

c) Dacă x $\in$[-1,0)➔[x]=-1, iar {x}=x-[x]=x-(-1)=x+1 ➔
$2^x + 2^{[x]} + 2^{\{x\}} = 3$ ➔ x=$\log_2 \frac{5}{6}$

d) Dacă x$\in$[0,1) ➔[x]=0 ; {x}=x ➔
$2^x + 2^0 + 2^x = 3$ ➔ x=0

Din a ; b ; c ; d. → **S**= { $\log_2 \frac{5}{6}$; 0 }

4. Fie $\frac{z_1}{z_2 + z_3} = a + ib,\ \ a, b \in R.$

Egalitatea $\left|z_1 + z_2 + z_3\right| = \left|z_2 + z_3\right|$ sescrie

$$\left|\left(z_2 + z_3\right)\left(\frac{z_1}{z_2 + z_3} + 1\right)\right| = \left|z_2 + z_3\right| \Leftrightarrow \left|z_2 + z_3\right| \cdot \left|\frac{z_1}{z_2 + z_3} + 1\right| = \left|z_2 + z_3\right|$$

şi cum $\left|z_2 + z_3\right| \neq 0$, rezultă $\left|\frac{z_1}{z_2 + z_3} + 1\right| = 1 \Leftrightarrow \left|a + 1 + bi\right| = 1$ de unde $(a+1)^2 + b^2 = 1$. (1)

Avem $\left|z_2 + z_3\right| = \left|z_1\right| \Leftrightarrow \left|\frac{z_1 + z_3}{z_1}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|a + bi\right| = 1$, adică $a^2 + b^2 = 1$. (2)

Din (1) rezultă $b^2 = 1 - (a+1)^2$ şi înlocuind în (2) obținem $a^2 + 1 - (a+1)^2 = 1 \Leftrightarrow 2a + 1 = 0$, deci $a = -\frac{1}{2}$ iar $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aşadar , există două soluții : $\frac{z_1}{z_2 + z_3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\frac{z_1}{z_2 + z_3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN VRANCEA

COLEGIUL TEHNIC “EDMOND NICOLAU”

Str. 1 Decembrie 1918, nr. 10, tel: 0237/213784

Focsani-Vrancea

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

Clasa a-X MATE - INFO

9.02.2013

1.Pentru $n \in N, n \geq 2,$ notam cu U_n multimea radacinilor de ordinul n ale unitatii si

$\varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{n} + isin\frac{2k\pi}{n}$.Aratati ca :

a)$\forall x, y \in U_n \rightarrow xy \in U_n$

b)$\overline{\varepsilon_k} = \varepsilon_{n-k}$

c)$\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_1^j = 0$

2.Rezolvati ecuatia :

$\sqrt[3]{7x+1} + \sqrt[3]{8+x-x^2} + \sqrt[3]{x^2-8x-1} = 2$

3.Rezolvati ecuatia:

sin2x+cos2x=sinx+cosx

4.Fie $a_1, a_2, \dots \dots a_n \in (0, \infty)$

a) demonstrati ca $\frac{1}{1+log_{a_1}a_2+log_{a_1}a_3+\cdots\dots log_{a_1}a_n}$ +

$\frac{1}{log_{a_2}a_1+1+log_{a_2}a_3+\cdots\dots log_{a_2}a_n} + \dots\dots\dots.. + \frac{1}{log_{a_n}a_1+log_{a_n}a_2+\cdots\dots log_{a_n}a_{n-1}+1}$=1

b)$\lg(a_1 + a_2) \geq \frac{1}{2} lg a_1 a_2 + lg2$

Subiecte propuse de profesor Trofin Cristina

OLIMPIADA DE MATEMATICÃ

ETAPA LOCALÃ – ADJUD

9 februarie 2013

Clasa a X-a

Subiectul 1.

Determinați media aritmetică a radăcinilor ecuației : $\left(\log_4 e^2\right)^x + \left(4\ln 2\right)^x = 2^{x+2}$.

(Admitere 2006,Marketing)

Subiectul 2.

Fie numerele reale a,b astfel □nc□t $0 < a < b < 1$. Fie $z \in C - R$ cu proprietatea că $\frac{(z-a)(z-b)}{z(z-1)}$ este un număr real strict pozitiv. Să se arate că $\left|1-\frac{1}{z}\right| = \sqrt{\frac{(a-1)(b-1)}{ab}}$.

(Gazeta Matematică , nr.4/2012)

Subiectul 3.

a) Arătați că nu există funcții injective $f : R \to R$ cu proprietatea că : $f(2^x) + f(\log_2 x) = 1, \forall x > 0$.

b) Să se arate că nu există o funcție $f : (0;+\infty) \to R$ cu proprietatea că $f^2(x^2) - 3f(2^x) + 4\log_2 x = 0, \forall x > 0$

***

Subiectul 4.

Fie $z_1, z_2, z_3 \in C$ pentru care $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ şi $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ .Arătați că $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

(Algebra pentru grupele de excelență)

Subiecte propuse de **:** prof. Munteanu Daniel – Liceul “Emil Botta ” Adjud

Barem de corectare şi notare.
Clasa a X-a --- Liceul "Emil Botta" Adjud
Etapa locală – 9 februarie 2013

Subiectul 1.
Ecuația se scrie
$\left(\log_2 e\right)^x+\left(4\ln 2\right)^x=2^{x+2}$ ………………………………………………………….(1p)
$\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^x+\left(4\ln 2\right)^x=2^{x+2}$ ……………………………………………………………………
…….(1p)
$\left(\frac{1}{2\ln 2}\right)^x+\left(2\ln 2\right)^x=4$ ……………………………………………………………………
……….(1p)
Cu notația $\left(2\ln 2\right)^x=t, t>0$ ecuația devine
$t^2-4t+1=0$ …………………………………………(1p)
Soluțiile sunt
$t_1=2+\sqrt{3}, t_2=2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ………………………………………………………(1p)
Atunci
$t_1\cdot t_2=\left(2\ln 2\right)^{x_1+x_2}=1$ ……………………………………………………………………
…(1p)
Rezultă $x_1+x_2=0\Rightarrow$ media aritmetică a rădăcinilor este
0………………………………………..(1p)

Subiectul 2.
Fie
$\lambda=\frac{(z-a)(z-b)}{z(z-1)}=\frac{\left(1-\frac{a}{z}\right)\left(1-\frac{b}{z}\right)}{1-\frac{1}{z}}$ ……………………………………………………
……..(1p)
Notăm
$1-\frac{1}{z}=t\Rightarrow\left[1-a(1-t)\right]\left[1-b(1-t)\right]=\lambda t$ ……………………………………………(2
p)
$abt^2+\left[b(1-a)+a(1-b)-\lambda\right]t+(1-a)(1-b)=0$ ………………………………………
………..(1p)
Cum $z\in C-R\Rightarrow t\in C-R\Rightarrow t$ şi $\bar{t}$ sunt soluțiile ecuației cu coeficienți reali

$abx^2+\left[b\left(1-a\right)+a\left(1-b\right)-\lambda\right]x+\left(1-a\right)\left(1-b\right)=0$ ……………………………………… …… (2p)

Din a doua relație a lui Viete $\Rightarrow \left|t\right|^2=t\cdot\bar{t}=\frac{\left(1-a\right)\left(1-b\right)}{ab}$ de unde concluzia…………………..(1p)

Subiectul 3.

a) Pentru $x=1\Rightarrow f(2)+f(0)=1$ ……………………………………………………………(1p)

Pentru $x=4\Rightarrow f(16)+f(2)=1$ ………………………………………………………….(1p)

Atunci $f(0)=f(16)\Rightarrow$ f nu este injectivă……………………………………………………(2p)

b) Pentru $x=2$ rezultă $f^2(4)-3f(4)+4=0$ ………………………………………………..…(1p)

Notăm $f(4)=t\Rightarrow t^2-3t+4=0$ ……………………………………………………..(1p)

$\Delta=9-16=-7<0\Rightarrow$ ecuația nu are soluții reale

$\Rightarrow f(4)\notin R$ ……………………………(1p)

Subiectul 4.

$\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3=0$ ………………………………………………………………………..(2p)

Utiliz□nd $\left|z\right|=1\Rightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}\Rightarrow\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=0\Rightarrow z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=0$ ……………………………(2p)

$\left(z_1+z_2+z_3\right)^2=0\Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2+2(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)=0$ ………………………………………(2p)

Concluzia………………………………………………………………………………………(1p)

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI VRANCEA

Centrul metodic Odobeşti

Olimpiada de matematică

Faza locală - 9 februarie 2013

Clasa a X –a Matematică - Informatică

1. Să se rezolve ecuația: $\frac{1}{x^2}\cdot 2013^{x^2}+x^2\cdot 2013^{\frac{1}{x^2}}=4023$.

2. Arâtați că dacă a,b,c $\in(1,\infty)$, atunci.:

$$\frac{\log_a b+\log_b c}{1+\log_a c}+\frac{\log_b c+\log_c a}{1+\log_b a}+\frac{\log_c a+\log_a b}{1+\log_c b}\geq 3.$$

3. Rezolvați în N^*, ecuațiile:

   a) $\sin\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{\pi}{n}=\frac{\sqrt{n}}{2}$;

   b) $\sin\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2}$.

4. Fie ABCD un trapez cu baza mare CD şi O intersecția diagonalelor sale. În exterior considerăm punctele M şi N astfel încât $\angle$MDA=$\angle$CBN=$\angle$DBA şi $\angle$MAD=$\angle$BCN=$\angle$CAD. Să se arate că punctele M, O, N sunt coliniare şi BD$\cdot$AC>AB$\cdot$MN.

Notă: - Toate subiectele sunt obligatorii

- Fiecare problemă se notează cu 7 punte
- Timp de lucru 3 ore

Propunător :

Prof : Zamfir Teodora

Olimpiada de matematică
Faza locală - 9 februarie 2013
Clasa a X –a Matematică - Informatică
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Subiect	SOLUȚII	BAREM DE CORECTARE
1	Notăm $x^2=t$ și vom aplica de două ori inegalitatea mediilor și avem $\frac{1}{t}\cdot 2013^t + t\cdot 2013^{\frac{1}{t}} \ge 2\sqrt{2013^{t+\frac{1}{t}}} \ge 2\sqrt{2013^2} = 4026$. Deoarece avem egalitate rezultă că $t=1$ de unde $x = 1$ sau $x= -1$	1p 5p 1p
2	Notăm cu ln a= x, ln b= y, ln c= z, inegalitatea se rescrie: $\sum \frac{\frac{y}{x}+\frac{z}{y}}{1+\frac{z}{x}} \ge 3$ evident $\sum\left(\frac{y}{x+z}+\frac{xz}{yx+yz}\right) \ge 3$. Avem, conform inegalității lui Nesbitt, $\sum \frac{y}{x+z} \ge \frac{3}{2}$ şi $\sum \frac{xz}{yx+yz} \ge \frac{3}{2}$, care adunate, dau inegalitatea dorită. Egalitate avem pentru a=b=c=1.	2p 3p 2p
3 a)	Ecuația se scrie succesiv $\sin\frac{\pi}{2n}+\cos 2\frac{\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2} \Rightarrow 2\sin\frac{\pi}{2n}+2\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)=\sqrt{n}$. Notăm cu $x=\sin\frac{\pi}{2n}\in[0,1]$ avem $4x^2-2x+\sqrt{n}-2=0$. Avem $\Delta=4\left(9-4\sqrt{n}\right)$ şi $\Delta\ge 0$ din rezultă $n\in\{1,2,3,4,5\}$. Pentru n=1 nu convine. Pentru n=2, rezultă $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, deci n=2 este soluție. Pentru n=3, rezultă $\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ne\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pentru n=4, rezultă $\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2}}{2}\ne\frac{\sqrt{4}}{2}$, iar pentru n=3 se scrie $\sin\frac{\pi}{10}+\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ este soluție, mulțimea soluțiilor $S=\{2,5\}$	1p 1p 1p 1p
3 b)	Ecuația se scrie echivalent cu $\frac{n}{2}=\left(\sin\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{\pi}{2n}\right)^2=1+2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}$ adică $\sin\frac{\pi}{n}=\frac{n-4}{4}$. Această ecuație are soluție unică n=6, membrul stâng al ecuației	

	fiind funcție descrescătoare de n, iar cel drept funcție crescătoare de n.	
4	Avem: $\angle$AMD=180^0 - $\angle$MAD - $\angle$MDA = 180^0 - $\angle$OAB - $\angle$OBA = $\angle$AOB, deci MAOD este patrulater inscriptibil. Analog, BNCO este patrulater inscriptibil. Rezultă că $\angle$MOA=$\angle$MDA=$\angle$OBA, $\angle$BON=BCN=$\angle$OAB, de unde $\angle$MOA+$\angle$AOB+$\angle$BON=180^0, prin urmare M, O, N sunt coliniare. Din asemănarea triunghiurilor MAO şi DAB rezultă că $\frac{AO}{AB}=\frac{MO}{BD}$, deci AO$\cdot$BD = MO$\cdot$AB. Din asemănarea triunghiurilor NCO şi DCB rezultă că $\frac{CO}{CB}=\frac{NO}{DB}$ şi obținem CO$\cdot$BD = NO$\cdot$DC. Prin sumarea avem: BD$\cdot$AC = AB$\cdot$MO+DC$\cdot$NO > AB(MO+NO) = AB$\cdot$MN.	1p 1p 2p 1p 1p