OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE CLASA a VI-a 18.05.2019

Problema 1.(7 puncte)

Numerele a,b,c sunt întregi nenule şi $\frac{a}{2019a+3}=\frac{b}{2019b+5}=\frac{c}{2019c+7}$. *Determinaţi valorile lui a,b,c ştiind că* $a^2+b^2+c^2$ *divide 83.*

Soluţie: $2019+\frac{3}{a}=2019+\frac{5}{b}=2019+\frac{7}{c}\Longrightarrow\frac{3}{a}=\frac{5}{b}=\frac{7}{c}$ .... **(2p)**

$\Longrightarrow\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}=k\Longrightarrow \mathrm{a}=3\mathrm{k},\mathrm{b}=5\mathrm{k},\mathrm{c}=7\mathrm{k}$ .... **(2p)**

$a^2+b^2+c^2=83k^2|83\Longrightarrow\ k^2=1\Longrightarrow \mathrm{k}\in\{-1;1\}$ .... **(2p)**

$k=-1,a=-3,b=-5,c=-7$ sau $k=1,a=3,b=5,c=7$ .... **(1p)**

Problema 2.(7 puncte)

Determinaţi ultimele două cifre ale celui mai mic număr natural n cu proprietatea că suma resturilor obţinute prin împărţirea la 10,11,12,…,20 este egală cu 154.

Soluţie:

$$\left.\begin{array}{l} n=10c_1+r_1,\ \ r_1\le 9\\ n=11c_2+r_2,\ \ r_2\le 10\\ \quad\dots\dots.\\ n=20c_{11}+r_{11},\ \ r_{11}\le 19\end{array}\right\}$$ .... **(2p)**

$r_1+r_2+\cdots+r_{11}\le 9+10+\cdots+19=154$ .... **(1p)**

$\Longrightarrow r_1=9,r_2=10,\dots,r_{11}=19$ .... **(2p)**

Deci $n+1=c.m.m.m.c\ [10,11,\dots,20]=2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$ .... **(1p)**

$\mathrm{U}_{2\ \mathrm{cifre}}(\mathrm{n})=59$ .... **(1p)**

Problema 3.(7 puncte)

Triunghiul ABC este dreptunghic, $m(\sphericalangle A)=90°$, $m(\sphericalangle C)=30°$, *iar (BD este bisectoarea unghiului* $\sphericalangle ABC, D\in(AC)$. *Fie M mijlocul segmentului* $[BD]$. *Arătaţi că:*

a) $DC=2\cdot AM$;

b) $AM\perp BC$;

Soluţie: desen corect .... **(1p)**

a) $\Delta\mathrm{ABC}\ m(\sphericalangle A)=90°,[AM]$ mediană $\Longrightarrow \mathrm{AM}=\frac{\mathrm{BD}}{2}$, ΔBDC isoscel $\Longrightarrow \mathrm{BD}=\mathrm{DC}=2\cdot\mathrm{AM}$ .... **(3p)**

b) Fie $\{P\}=\mathrm{AM}\cap\mathrm{BC}$, $\mathrm{AM}=\mathrm{MD}\Longrightarrow\Delta$AMD isoscel, $m(\sphericalangle ADB)=60°$(în $\Delta ABD, m(\sphericalangle ABD)=30°$) $\Longrightarrow$ ΔAMD echilateral $\Longrightarrow m(\sphericalangle APC)=90°\Longrightarrow AM\perp BC$. .... **(3p)**

Problema 4.(7 puncte)

Fie triunghiul echilateral ABC. Pe laturile (BC), (CA), (AB) se consideră punctele M, N, respectiv P, astfel încât m(∢NBC)=x⁰, m(∢ANP)=2x⁰, m(∢BPM)=3x⁰.

a) Arată că ΔBPN este isoscel;

b) Demonstrează că dacă x=15, atunci MN⊥AC.

Soluţie: desen corect .... **(1p)**

a) $\mathrm{m}(\sphericalangle ANB)=x+60°\Longrightarrow\left.\begin{array}{l}\mathrm{m}(\sphericalangle PNB)=60°-x\\ \mathrm{m}(\sphericalangle PBN)=60°-x\end{array}\right\}\Longrightarrow\Delta$PBN isoscel .... **(3p)**

b) $x=15°\Longrightarrow\Delta$PBN dreptunghic isoscel $\Longrightarrow$ PM bisectoarea $\sphericalangle BPN$ .... **(1p)**

PM mediatoare $\Longrightarrow \mathrm{MB}=\mathrm{MN}\Longrightarrow\Delta$BMN isoscel $\Longrightarrow\ \mathrm{m}(\sphericalangle BNM)=\mathrm{m}(\sphericalangle NMB)=15°$ .... **(1p)**

$\Longrightarrow\ \mathrm{m}(\sphericalangle ANM)=\mathrm{m}(\sphericalangle ANP)+\mathrm{m}(\sphericalangle PNB)+\mathrm{m}(\sphericalangle BNM)=90°$ .... **(1p)**

„Binele ce-l faci la oarecine, ţi-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!