# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
# ETAPA LOCALĂ
# CLASA a VIII-a
# 27.02.2015

## Subiectul I.(30 puncte )

a) Dacă $a,b,c$ sunt numere reale nenule, care verifică relaţiile $a+b+c=9$ şi $ab+bc+ac=27$, să se arate că numărul $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ este natural.

*prof. Vasile Şerdean , Şcoala Gimnazială nr. 1 Gherla*

b) Fie $S= 1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+...+(n-1)\cdot n\cdot (n+1)$, $n\in N$ , $n\geq 2$.

1. Calculați S dacă $n = 100$.
2. Determinați $n\in N$ , dacă $S = 89700$.

*prof. Grigore Tarța, Liceul Teoretic „Ana Ipătescu” Gherla*

## Subiectul II.(20 puncte )

Fie $A$, $B$, $C$, $D$ patru puncte necoplanare astfel încât $AD\perp BC$ și $m(\langle ADB)=m(\langle ADC)$. Demonstrați că triunghiul $ABC$ este isoscel.

*prof. Elena Măgdaş, Şcoala Gimnazială Horea Cluj-Napoca*

## Subiectul III.(20 puncte)

Fie ABCD un pătrat şi $AM\perp(A,B,C)$. Punctele E şi F aparţin segmentelor (AD) şi respectiv (BC) astfel încât AE = ED şi BF = 2FC. Dreapta EF intersectează prelungirea laturii CD în punctul G. Arătaţi că dacă distanţa de la D la MG este egală cu distanţa de la A la MG, atunci $AM = 3\cdot AB$.

*prof. Radu Poenaru, Transylvania College Cluj-Napoca*

## Subiectul IV.(20 puncte)

Se consideră numărul $a=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

a) Să se arate că $a$ este număr întreg par, pentru orice x și y din $\mathbb{Z}$.

b) Să se determine perechile de numere întregi x și y astfel încât $a$ să fie număr prim.

*prof. Alb Nicolae, Liceul Teoretic „Octavian Goga” Huedin*

**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.** ***SUCCES!***
**Timp efectiv de lucru - 3 ore.**

P-ța Ştefan cel Mare nr. 4, Cluj - Napoca
Tel: +40 (0) 264 590 778, Fax: +40 (0) 264 592 832
www.isjcj.ro ,cluj@isjcj.ro

# Barem clasa a VIII-a
# (OLM 2015-etapa locală)

**Of. 10 p**

**Subiectul I. (30 puncte)**

a) Din $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) \Rightarrow a^2+b^2+c^2=27$ **(5 p)**

Cum $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ac) = 2\cdot 27 - 2\cdot 27 = 0$ **(5 p)**

**Deci** $a-b=b-c=c-a \Rightarrow a=b=c$

Din a+b+c=9 şi $a=b=c \Rightarrow a=b=c=3 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=3\cdot\frac{1}{3}=1\in N$ **(5 p)**

b) Pornind de la egalitatea : $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)=n^3-n$ , suma S devine :

S = $2^3-2+3^3-3+4^3-4+...+n^3-n = 1^3+2^3+3^3+4^3+...+n^3-(1+2+3+4+...+n) =$

$= \frac{n\cdot(n+1)}{2}\cdot\frac{(n-1)\cdot(n+2)}{2} \Rightarrow$ **S =** $\frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{4}$**.** **(5 p)**

a). Dacă n = 100 , avem S=$\frac{99\cdot 100\cdot 101\cdot 102}{4}=\frac{(100-1)\cdot(100+1)\cdot 10200}{4}=9999\cdot 2550=25497450$ **(5 p)**

b). Dacă S = 89700 $\Rightarrow \frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{4}=89700 \Rightarrow (n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=4\cdot 89700=$

$= 2^2\cdot 2^2\cdot 5^2\cdot 3\cdot 13\cdot 23 = 23\cdot(2^3\cdot 3)\cdot 5^2\cdot(2\cdot 13)=23\cdot 24\cdot 25\cdot 26 \Rightarrow n=24.$ **(5 p)**

**Subiectul II. (20 puncte )**

Desen corect **(5 p)**

Trasăm $AO\perp(BCD)\Rightarrow AO\perp BC, BC\perp AD\Rightarrow BC\perp(DAO)\Rightarrow BC\perp DO\,(1)$

$T3\perp\Rightarrow AE\perp BD$ şi $AF\perp DC$ **(5 p)**

Din congruenţa triunghiurilor $AED$ şi $AFD \Rightarrow [ED]\equiv[DF]$

Din congruenţa triunghiurilor $DOE$ şi $DOF \Rightarrow m(\langle ODE)=m(\langle ODF)\Rightarrow [DO$ bisectoare(2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow \Delta BCD$ isoscel $\Rightarrow BD=DC$ **(5 p)**

Din congruenţa triunghiurilor $ABD$ şi $ACD \Rightarrow [AB]\equiv[AC]\Rightarrow \Delta ABC$ isoscel. **(5 p)**

**Subiectul III. (20 puncte )**

Notăm cu AA', respectiv DD' cele două perpendiculare din D şi respectiv A pe dreapta MG.

Atunci AA' = DD' $\Rightarrow \frac{AA'\cdot MG}{2}=\frac{DD'\cdot MG}{2}\Rightarrow A_{AMG}=A_{DMG}$. **(3 p)**

Justificăm faptul că triunghiurile MDG şi MAG sunt dreptunghice. **(2 p)**

Atunci $A_{AMG}=A_{DMG}\Rightarrow\frac{MD\cdot DG}{2}=\frac{MA\cdot AG}{2}\Rightarrow MD\cdot DG=MA\cdot AG$ **(5 p)**

Notăm $AM=x$ şi $AD=a$.

Folosim TFA în triunghiul EDG $\Rightarrow \frac{CG}{GD}=\frac{FC}{ED}\Rightarrow \frac{CG}{GD}=\frac{a}{3}:\frac{a}{2}\Rightarrow CG=2CD\Rightarrow CG=2a$ **(2 p)**

Folosim Teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ADG $\Rightarrow AG=a\sqrt{10}$. **(2 p)**

Folosim Teorema lui Pitagora în triunghiul MAD $\Rightarrow MD=\sqrt{a^2+x^2}$ **(2 p)**

Deoarece $A_{AMG}=A_{DMG}\Rightarrow MA\cdot AG=MD\cdot GD\Rightarrow x\cdot a\sqrt{10}=3a\cdot\sqrt{a^2+x^2}\Rightarrow$

$x\cdot\sqrt{10}=3\sqrt{a^2+x^2}\Rightarrow x^2\cdot 10=9(a^2+x^2)\Rightarrow x^2=9a^2\Rightarrow x=3a$ **(4 p)**

**Subiectul IV. (20 puncte )**

a) $a = \left(x + \frac{3}{2} + y - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2} - y + \frac{1}{2}\right) = (x + y + 1)(x - y + 2) = x^2 - y^2 + 2(x + y) + x - y + 2 = x^2 + x - y^2 + y + 2x + 2 = x(x + 1) - y(y - 1) + 2(x + 1)$

= nr. intreg par, deoarece fiecare din cei trei termeni sunt numere pare. **(10 p)**

b) $a = (x + y + 1)(x - y + 2)$. Din 1) rezulta ca $a$ este nr. par, de unde a este prim dacă şi numai dacă $a = 2$.

Avem următoarele cazuri:

$x + y + 1 = 1$ şi $x - y + 2 = 2 \Leftrightarrow x = 0, y = 0$;

$x + y + 1 = -1$ şi $x - y + 2 = -2 \Leftrightarrow x = -3, y = 1$;

$x + y + 1 = 2$ şi $x - y + 2 = 1 \Leftrightarrow x = 0, y = 1$;

$x + y + 1 = -2$ şi $x - y + 2 = -1 \Leftrightarrow x = -3, y = 0$;

Astfel: $S = \{(-3,0); (-3,1); (0,0); (0,1)\}$. **(10 p)**