Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraş-Severin, 16.02.2013

Clasa a XI-a

Problema 1:

Fie A, B, C matrice pătratice de ordinul n cu elemente reale astfel încât $AC = C(B+C)$ şi $AB + C^2 = I_n$

a) Arătaţi că $(A+\varepsilon C)(B-\varepsilon C) = I_n$, unde ε este rădăcina complexă cubică a unităţii.

b) Demonstraţi că $AB = BA$.

Gazeta Matematică 5 / 2012

Problema 2:

a) Studiaţi dacă există un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ nemonoton cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

b) Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ pentru care $x_n^2 - 2nx_n + n^2 - 1 \leq 0$, $\forall n \geq 1$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$.

RMCS 36

Problema 3:

Fie A şi B două matrice pătratice de ordinul n cu elemente complexe, cu $rang A = n-1$ şi $\det(B + A^*) = \det(B - A^*) = 1$. Calculaţi $\det B$.

Gazeta Matematică 3/2012

Problema 4:

a) Daţi exemplu de două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A \neq I_2, B \neq I_2$ cu $AB = I_2$

b) Daţi exemplu de o matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $B^2 = A$, unde $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

c) Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ care satisfac $A^2 = B^2 = I_2$ şi $\det A = \det B = -1$.
Demonstraţi că există $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât $AB + BA = \lambda I_2$.

* * *

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.

Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraş-Severin, 16.02.2013

Clasa a XI-a
BAREME

Problema 1:

$(BA+C^2)-\varepsilon(CA-BC-C^2)=I_n$ ....3 pct

Cum A,B,C matrici elementare reale, rezultă $CA-BC-C^2=O_n$ şi $BA+C^2+\frac{1}{2}O_n=I_n$ 2pct

Obţine că $AB=BA$ 2pct

Problema 2:

Din $(x_n-n)^2\le 1$ deducem $n-1\le x_n\le n+1$ 3pct

Aplică teorema cleştelui şi obţine $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=1$. 4pct

Problema 3:

Deoarece $\det A=0$, obţine $AA^*=O_n$ 1pct

Foloseşte ineg. lui Sylvester şi obţine $rangA+rangA^*-n\le rangAA^*=0\Rightarrow rangA^*\le 1$ 2pct

Consideră funcţia $f(x)=\det(B+xA^*)=\det B+x\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ji}B_{ij}$, $A_{ji};B_{ij}$ complemenţi algebrici..................2pct

Cum $f(1)=f(-1)$, rezultă f constantă, $\det B=f(0)=f(1)=1$ 2pct

Problema 4:

exemplu de matrici A şi B, verificare...........................1pct

exemplu de matrice B, verificare...........................1pct

Foloseşte relaţia HC şi deduce $trA=trB=0$ 2pct

Apoi $tr(A+B)=trA+trB$ ....2 pct

Deci $(A+B)^2=\mu I_2\Leftrightarrow A^2+B^2+AB+BA=\mu I_2\Leftrightarrow AB+BA=\lambda I_2$...........................1pct