INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI BACĂU

COLEGIUL NAŢIONAL "FERDINAND I" BACĂU

Concursul Interdisciplinar "Vrănceanu – Procopiu"

27 noiembrie 2024

ETAPA JUDEȚEANĂ

XI

MATEMATICĂ – barem de rezolvare

Problema I (10 puncte)

Să se determine $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}$ știind că ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5a \end{pmatrix}$ are exact două soluții în $M_2(\mathbb{C})$.

Solutie

Fie X o soluție a ecuației, d= det X și t=Tr X.

Din teorema lui Cayley- Hamilton, rezultă tX= $\begin{pmatrix} 1+d & -2 \\ 2 & 5a+d \end{pmatrix}$ ***(1p)***

Aplicând urma matricelor se obține t^2=5a+2d+1 ***(1p)***

Dacă 5a+2d+1≠0, atunci $\exists t_1, t_2 \in \mathbb{C}^*, t_1 \neq t_2$ astfel încât $t_1^2 = t_2^2$ =5a+2d+1

Din $d^2 = 5a + 4$, $a \in \mathbb{N}$ rezultă $d^2 \neq 0$, atunci $\exists d_1, 2_2 \in \mathbb{C}^*, d_1 \neq d_2$ astfel încât $d_1^2 = d_2^2$ =5a+4

Deci $X \in \left\{\frac{1}{t_1}\begin{pmatrix} 1+d_1 & -2 \\ 2 & 5a+d_1 \end{pmatrix}; \frac{1}{t_1}\begin{pmatrix} 1+d_2 & -2 \\ 2 & 5a+d_2 \end{pmatrix}; \frac{1}{t_3}\begin{pmatrix} 1+d_1 & -2 \\ 2 & 5a+d_1 \end{pmatrix}; \frac{1}{t_4}\begin{pmatrix} 1+d_1 & -2 \\ 2 & 5a+d_1 \end{pmatrix}\right\}$

$t_1^2 = t_2^2 = 5\mathrm{a} + 2\mathrm{d}_1 + 1, t_3^2 = t_4^2$ =5a+2d_2+1, $t_1 \neq t_2, t_3 \neq t_4$ ***(2p)***

Cele patru matrice sunt distincte și sunt soluții ale ecuației. Cum ecuația trebuie să aibă exact două soluții, atunci

$(5\mathrm{a} + 2\mathrm{d}_1 + 1)(5\mathrm{a} + 2\mathrm{d}_2 + 1) = 0 \Rightarrow (5a+1)^2 - 4(5a+4) = 0 \langle = \rangle a \in \left\{1, -\frac{3}{5}\right\}$ ***(2p)***

Cum $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a = 1$ ***(2p)***

Pentru a=1 , ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5a \end{pmatrix}$ are soluțiile $X_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; $X_2 = -X_1$ ***(1p)***

Problema a II-a (10 puncte)

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de $x_n = n\left(\frac{\pi^2}{8} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}\right), k \in N, k \geq 1$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}(5\, x_n - x_{2n})$.

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI BACĂU

COLEGIUL NAŢIONAL "FERDINAND I" BACĂU

Concursul Interdisciplinar "Vrănceanu – Procopiu"

27 noiembrie 2024

ETAPA JUDEȚEANĂ

XI

MATEMATICĂ – barem de rezolvare

Solutie

Fie $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots + \frac{1}{n^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}$ *(1p)*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots + \frac{1}{(2n)^2}\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} \dots + \frac{1}{(2n)^2}\right) = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots + \frac{1}{(2n)^2}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots + \frac{1}{n^2}\right) = a_{2n} - \frac{1}{4} a_n$$ **(2p)**

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$ **(2p)**

$$x_n = \frac{\left(\frac{\pi^2}{8} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}\right)}{\frac{1}{n}}$$ **(1p)**

Aplicând lema Stolz- Cezaro în cazul $\frac{0}{0}$ obținem:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\pi^2}{8} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}$$ **(2p)**

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} (5\, x_n - x_{2n}) = 1$ **(1p)**