OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-15 FEBRUARIE 2014
Clasa a VII-a

1. Fie $A_n = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = \pm p_1 \pm p_2 \pm p_3 \pm .... \pm p_n\}$ unde $p_1, p_2, ..., p_n$ sunt primele n numere naturale prime iar semnele + şi respectiv – se aleg în toate modurile posibile.

a) Să se arate că $0 \in A_5$

b) Arătaţi că $A_{2p}, p \geq 1, p \in \mathbb{N}$, are un număr par de elemente.

c) Arătaţi că dacă $k, p \geq 1, k, p \in \mathbb{N}$, atunci: $A_{2p} \cap A_{2k+1} = \varnothing$.

prof. Nicolae Stăniloiu, Bocşa

2. Determinaţi numerele naturale a, b, c astfel încât fracţiile: $\frac{a+b}{b+c}, \frac{2(b+c)}{c+a}, \frac{3(c+a)}{a+b}$ să fie toate numere naturale.

prof. Nicolae Stăniloiu, Bocşa

3. Triunghiul *ABC* este isoscel de bază $[BC]$ cu $m(\sphericalangle A) > 90^o$. Fie *FD* şi *GE* mediatoarele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$ cu $D \in (AB)$ şi $E \in (AC)$, $F, G \in BC$ iar $DF \cap GE = \{H\}$. Fie *T* mijlocul laturii $[BC]$. Arătaţi că:

a) ΔHDE este isoscel;

b) $HT \perp BC$;

c) *HT* este mediatoarea segmentului $[DE]$.

RMCS 41

4. Prin mijlocul M al diagonalei AC a unui trapez ABCD construim NM || BD, N$\in$ AB.

Ştiind că CN $\perp$ AB, demonstraţi că AD=BC

GMS 12

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-15 FEBRUARIE 2014
Clasa a VII-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE DE EVALUARE ŞI NOTARE

- *Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.*
- *Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .*

Problema 1:

a)	$0=-2+3-5-7+11\in A_5$	**2p**
b)	**Observaţia 1**: Dacă pentru calculul unui element a din A_{2p} se face o alegere de semne în faţa numerelor prime $p_i, i=\overline{1..2p}$, schimbând toate semnele se va obţine evident ca rezultat opusul lui a, adică –a..	**1p**
	Observaţia 2: Pentru că singurul număr par din expresia de calcul a unui element a din A_{2p} este $p_1=\pm 2$, restul fiind impare, va rezulta că A_{2p} conţine doar numere impare şi deci $0\notin A_{2p}$	**1p**
	Observaţia 3. Elementele lui A_{2p} se pot grupa în perechi de numere $(-a,a)$ cu $a\neq 0$ şi deci numărul de elemente din A_{2p} este par..	**1p**
c)	**Observaţia 1**: A_{2p} conţine doar numere impare. (s-a punctat mai sus) **Observaţia 2**: A_{2k+1} conţine doar numere pare...	**1p**
	Concluzia – evidentă	**1p**

Problema 2:

Notăm: $x=\dfrac{a+b}{b+c},\ y=\dfrac{2(b+c)}{c+a},\ z=\dfrac{3(c+a)}{a+b}\Rightarrow xyz=6$	**2p**
Avem variantele: a) $\begin{cases} x=1, y=2, z=3 & (1)\\ x=1, y=3, z=2 & (2)\\ x=2, y=1, z=3 & (3)\\ x=2, y=3, z=1 & (4)\\ x=3, y=1, z=2 & (5)\\ x=3, y=2, z=1 & (6)\end{cases}$ sau b) $\begin{cases} x=1, y=1, z=6 & (1)\\ x=1, y=6, z=1 & (2)\\ x=6, y=1, z=1 & (3)\end{cases}$	

....	**2p**
Cazul a) - (1) obţinem soluţia: $a=b=c=k\in\mathbb{N}^*$ Cazul a) - (2) obţinem soluţia: $a=c=k\in\mathbb{N}^*, b=2k$ Cazul a) - (3) obţinem soluţia: $b=c=k\in\mathbb{N}^*, a=3k$ Cazul a) - (4) nu există soluţii naturale, Cazul a) - (5) obţinem soluţia: $a=2b=2k\in\mathbb{N}^*, c=0$ Cazul a) - (6) nu există soluţii naturale..	**2p**
Cazul b) - (1) obţinem soluţia: $a=c=k\in\mathbb{N}^*, b=0$ Cazul b) - (2) obţinem soluţia: $a=c=k\in\mathbb{N}^*, b=5k$ Cazul b) - (3) nu există soluţii naturale..	**1p**

Problema 3:

a)	$\Delta HEA \overset{I.C.}{\equiv} \Delta HDA \Rightarrow (HE)\equiv(HD) \Rightarrow \Delta HDE$ isoscel	**2p**
b)	HE, HD mediatoare $\Rightarrow$ HT mediatoare $\Rightarrow$ HT $\perp$ BC	**2p**
c)	DE linie mijlocie în Δ ABC $\Rightarrow$ DE || BC $\Rightarrow$ HT $\perp$ DE $\Rightarrow$ HT înălţime..................	**2p**
	Δ HDE isoscel $\Rightarrow$ HT mediatoare	**1p**

Problema 4:

Se construieşte NM || d, $C\in d, \{E\}=d\cap AB$ NM linie mijlocie în Δ ACE $\Rightarrow$ $MN=\frac{CE}{2}$	**2p**
Δ ANC dreptunghic, MN mediană $\Rightarrow$ $MN=\frac{AC}{2}$ $\Rightarrow$ Δ ACE isoscel $\Rightarrow$(AC) $\equiv$(CE)	**2p**
DB || CE, DC || BE $\Rightarrow$ DBEC paralelogram $\Rightarrow$(DB) $\equiv$(CE)	**2p**
$\Rightarrow$(DB) $\equiv$(AC) $\Rightarrow$ABCD trapez isoscel $\Rightarrow$AD=AC...	**1p**