OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
21.02.2016

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL I

Fie $n = 3x^2 + 4y^2 - 4xy - 8x - 4,\ x \in [-1; 0]$ și $y \in [-1; 1]$. Să se arate că $n \in [-4; 15]$.

SUBIECTUL II

Pe o foaie de hârtie sunt scrise numerele $2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}; 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}; \dots; 2016\sqrt{2015} + 2015\sqrt{2016}$.
Orice pereche de numere (a, b) de pe foaia de hârtie se poate înlocui cu perechea de numere $\left(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}, a + b - \sqrt{a^2 + b^2}\right)$.

a) Demonstrați că $\frac{1}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, unde $a, b > 0$

b) Demonstrați că $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2016\sqrt{2015}+2015\sqrt{2016}} < 1$

c) Efectuând operaţia precizată mai sus, poate fi scris pe foaie un număr mai mic decât 1 ? Justificați răspunsul.

SUBIECTUL III

Pe planul triunghiului dreptunghic isoscel ABC cu ipotenuza BC = $6\sqrt{2}$ cm, se ridică perpendiculara AA', cu $AA' = 6$ cm. Considerăm $CC' \perp (ABC)$, $CC' = 6$ cm, astfel ca $ACC'A'$ pătrat.

a) Calculați distanța dintre dreptele $A'C$ și BC'.

b) Determinați lungimea proiecției segmentului $[BC]$ pe planul (ABC').

c) Aflați tg u^0, unde $u^0 = m[BC, \widehat{(ABC')}]$.

Subiectul IV

Se consideră cubul ABCDA'B'C'D' și M, N mijloacele muchiilor BC respectiv C'D'. Găsiți poziția punctului P pe muchia B'C' astfel încât suma MP+NP să fie minimă.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.