

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016



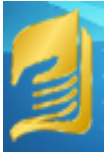
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A IX-A

1. La un concurs Adolf Haimovici, organizatorii au oferit drept premiu primilor 5 elevi clasai la clasa a IX-a un total de 17 cărți, fiecare elev primind cel puțin o carte.
 - a) Stabiliți dacă, în mod necesar, cel puțin doi elevi primesc mai mult de câte o carte.
 - b) Arătați că cel puțin un elev primește mai mult de 3 cărți.
 - c) Determinați în câte moduri se pot distribui premiile, astfel încât fiecare premiant să primească alt număr de cărți.
2. Fie M mulțimea tuturor progresiilor aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ cu toți termenii numere naturale.
 - a) Considerând progresia $(a_n)_{n \geq 1} \in M$ care are $a_1 = 6$ și $r = 10$, verificați dacă 2016 este sau nu termen al acestei progresii.
 - b) Determinați câte din progresiile $(a_n)_{n \geq 1} \in M$ care au $r = 10$, au printre termenii lor numărul 2016.
 - c) Determinați câte din progresiile $(a_n)_{n \geq 1} \in M$ care au $a_1 = 6$, au printre termenii lor numărul 2016.
3. Fie triunghiul ABC , M mijlocul laturii (BC) și punctele P, Q, R astfel încât $\overline{AP} = x \cdot \overline{AB}$, $\overline{AQ} = y \cdot \overline{AM}$ și $\overline{AR} = z \cdot \overline{AC}$, cu $x, y, z \in (0; +\infty)$. Arătați că:
 - a) $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$
 - b) $\overline{PQ} = \left(\frac{y}{2} - x\right) \cdot \overline{AB} + \frac{y}{2} \cdot \overline{AC}$
 - c) Punctele P, Q, R sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$
4. Un turist parcurge un traseu $ABCD$ format din trei drumuri, AB , BC și CD , toate de aceeași lungime egală cu 60 km. Turistul merge pe drumurile specificate cu vitezele v_1, v_2 , respectiv v_3 , măsurate în km/h .
 - a) Dacă $v_1 = 30$, $v_2 = 20$ și $v_3 = 50$, determinați durata t_1 a parcurgerii întregului traseu, măsurată în ore și minute.
 - b) Dacă turistul ar parcurge întregul traseu cu viteza medie $v = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3}$ a celor trei viteze de la punctul anterior, determinați durata t_2 a parcurgerii întregului traseu, măsurată în ore și minute.
 - c) Arătați că, oricare ar fi vitezele v_1, v_2 , respectiv v_3 , are loc inegalitatea $t_1 \geq t_2$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A X-A

1. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuațiile:

a) $5^{2x+1} = 4 \cdot 5^x + 1$

b) $x^2 + 2\sqrt{x^2 - 3x - 4} = 3x + 4$

c) $\log_4(3x - 2) \cdot \log_x 2 = 1$

2. Venitul lunar al unui tehnoredactor este format din salariul de bază de 800 lei la care se adaugă un spor astfel: dacă reușește să tehnoredacteze până la 200 pagini i se dă un comision de 2 lei pentru fiecare pagină scrisă iar pentru fiecare pagină ce depășește 200 primește 3 lei pentru fiecare pagină.

a) Determinați câți bani primește tehnoredactorul dacă într-o lună scrie 150 pagini. Dar dacă scrie 250 pagini?

b) Arătați că funcția pe baza căreia se calculează venitul lunar al tehnoredactorului este

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} 2n + 800, & \text{dacă } n \leq 200 \\ 3n + 600, & \text{dacă } n > 200 \end{cases}$$

unde n este numărul de pagini scrise de tehnoredactor.

c) Determinați câte pagini trebuie să scrie tehnoredactorul pentru a câștiga într-o lună 1620 lei.

3. Considerăm numerele complexe $z_a = \frac{1 - a \cdot i}{1 + a \cdot i}$, $a \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.

a) Determinați modulul și forma algebrică a numărului z_a

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $z_a = \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \cdot i$

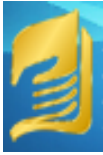
c) Arătați că $(z_{\sqrt{3}})^{2016}$ este număr real.

4. a) Arătați că $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $3^{2n} > 3n + 99$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

c) Determinați numerele naturale n, a, b și c , știind că $a + b + c = 3^n$ și $a^2 + b^2 + c^2 = 33 + n$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016



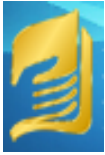
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XI-A

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se cere:
 - a) Arătați că $A^n = n \cdot A - (n-1) \cdot I_2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
 - b) Demonstrați că nu există $X \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3 \cdot X - X \cdot A^3 = B$.
 - c) Arătați că egalitatea $(A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$ este adevărată dacă și numai dacă $a \cdot c = 0$.
2. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 + x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3e^x - 2x + 1$. Se cere:
 - a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 1$;
 - b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) \cdot g(x) - g(0) \cdot f(x)}{x}$
 - c) Determinați numerele $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot g(x+1) + b \cdot f(x)}{x}$ există și este egală cu 2.
3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 2 & c \end{pmatrix}$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se cere:
 - a) Arătați că $\det A = (a-b)(c-3)$.
 - b) Demonstrați că pentru $a=3, b=2, c=4$, matricea A este inversabilă și inversa A^{-1} are toate elementele numere întregi.
 - c) Determinați o matrice $C \in M_3(\mathbb{Z})$, inversabilă și astfel încât să aibă inversa C^{-1} cu toate elementele numere naturale.
4. O sursă de căldură încălzește uniform un corp. Experimental, constatăm că temperatura corpului este dată de legea $T(t) = a \cdot t^b + c - \sqrt{t^2 + d \cdot t + 25}$, cu $a, b, c, d > 0$, unde numărul $t \geq 0$ reprezintă momentul măsurării, exprimat în minute, iar numărul $T(t)$ reprezintă temperatura corpului, exprimată în grade Celsius, la fiecare moment $t \geq 0$ ales. Se știe că la momentul inițial $t=0$ temperatura corpului este de 7 grade Celsius iar atunci când $t \rightarrow \infty$, temperatura corpului se apropie infinitesimal de 10 grade Celsius, adică $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = 10$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

a) Arătați că $c = 12$.

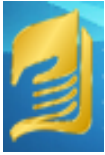
b) Demonstrați că $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = +\infty \cdot \operatorname{sgn}(b-1)$, unde $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{dacă } x > 0 \\ -1, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

c) Arătați că $T(t) = t + 12 - \sqrt{t^2 + 4t + 25}$.

d) Determinați la ce moment t temperatura corpului va fi de 9 grade Celsius.

e) Demonstrați că, la orice moment $t \geq 0$, temperatura corpului este strict mai mică de 10 grade Celsius.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016



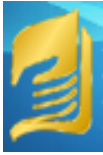
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XII-A

1. Fie funcția $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$. Se cere:
 - a) Determinați primitiva $F : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f , știind că $F(0) = 0$.
 - b) Calculați $\int_0^{e-1} f(x) dx$.
 - c) Dacă $g : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă încât pentru orice $x \geq 0$ se verifică egalitatea $x + \int_0^x g(t) dt = (x+1) \cdot g(x)$, arătați că $g = f$.
2. Definim pe mulțimea numerelor reale legea de compoziție $x \circ y = xy + 2x + 2y$. Se cere:
 - a) Arătați că legea " \circ " nu este asociativă.
 - b) Cercetați dacă structura algebrică $(\mathbb{R}; \circ)$ admite element neutru.
 - c) Găsiți două numere $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$.
 - d) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n^3 \circ n \neq 2016$.
3. În cadrul unui experiment, o sursă de căldură încălzește un corp astfel încât temperatura corpului, notată $t(x)$ și măsurată în grade Celsius, se modifică la fiecare moment $x \in [0; +\infty)$ al măsurării, exprimat în minute, prin funcția
$$t : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, t(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & \text{dacă } x \in [0; 3] \\ 5x - 1, & \text{dacă } x \in (3; 6) \\ 29, & \text{dacă } x \in [6; +\infty) \end{cases}$$
 - a) Arătați că funcția $t : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ admite primitive și este integrabilă pe orice $[a; b] \subset [0; +\infty)$.
 - b) Știind că $M(a; b) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$ exprimă valoarea medie a unei funcții f care este integrabilă pe un interval $[a; b] \subset \mathbb{R}$, calculați temperatura medie înregistrată prin acest experiment pe intervalul momentelor $a = 4$ și $b = 8$.
 - c) Determinați după câte minute de la momentul inițial $x_0 = 0$, temperatura medie înregistrată atinge valoarea de 20 grade Celsius.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

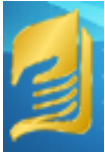


FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

4. Fie mulțimea $M = \{a^2 - ab + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ și numărul complex $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $i^2 = -1$.
- a) Arătați că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ și $\varepsilon^3 = 1$
- b) Arătați că, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, se verifică egalitatea $a^2 - ab + b^2 = (a + \varepsilon \cdot b)(a + \bar{\varepsilon} \cdot b)$,
unde $\bar{\varepsilon} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ este conjugatul numărului complex $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
- c) Demonstrați egalitatea $(a_1^2 - a_1b_1 + b_1^2) \cdot (a_2^2 - a_2b_2 + b_2^2) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$,
unde $\alpha = a_1a_2 - b_1b_2$, $\beta = a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2$ și $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$.
- d) Găsiți două numere $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(2016^2 - 2016 \cdot 2015 + 2015^2)^2 = \alpha^2 - \alpha \cdot \beta + \beta^2$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A IX-A

1. La un concurs Adolf Haimovici, organizatorii au oferit drept premiu primilor 5 elevi clasați la clasa a IX-a un total de 17 cărți, fiecare elev primind cel puțin o carte.
- Stabiliți dacă, în mod necesar, cel puțin doi elevi primesc mai mult de câte o carte.
 - Arătați că cel puțin un elev primește mai mult de 3 cărți.
 - Determinați în câte moduri se pot distribui premiile, astfel încât fiecare premiant să primească alt număr de cărți.

Soluție:

- Nu este necesar. Este posibil ca un elev să primească 13 cărți și ceilalți 4 câte o carte. 2 puncte
- Dacă toți elevii ar primi cel mult trei cărți atunci ar fi un total de cel mult 15 cărți, deci cel puțin un elev primește mai mult de trei cărți. 2 puncte
- Considerând $a < b < c < d < e$, $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c \geq 3$, $d \geq 4$, $e \geq 5$, numărul de cărți primite de cei cinci elevi, rezultă $a + b + c + d + e \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ 1 punct
și cum $a + b + c + d + e = 17$, rămân două posibilități
 $(a; b; c; d; e) = (1; 2; 3; 4; 7)$ 1 punct
și $(a; b; c; d; e) = (1; 2; 3; 5; 6)$ 1 punct

2. Fie M mulțimea tuturor progresiilor aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ cu toți termenii numere naturale.

- Considerând progresia $(a_n)_{n \geq 1} \in M$ care are $a_1 = 6$ și $r = 10$, verificați dacă 2016 este sau nu termen al acestei progresii.
- Determinați câte din progresiile $(a_n)_{n \geq 1} \in M$ care au $r = 10$, au printre termenii lor numărul 2016.
- Determinați câte din progresiile $(a_n)_{n \geq 1} \in M$ care au $a_1 = 6$, au printre termenii lor numărul 2016.

Soluție:

- $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ 1 punct
 $a_1 = 6$, $r = 10 \Rightarrow a_n = 10n - 4$ 1 punct
 $a_n = 2016 \Rightarrow 10n - 4 = 2016 \Rightarrow n = 202$, deci $2016 = a_{202}$ 1 punct
- $a_1 + (n-1) \cdot 10 = 2016$ 1 punct
 $a_1 = 2026 - 10n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{1; 2; 3; \dots; 202\}$,
deci sunt 202 progresii cu această proprietate 1 punct
- $a_n = 6 + (n-1) \cdot r = 2016 \Rightarrow (n-1) \cdot r = 2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$
 $r / 2010$ 1 punct
și cum 2010 are 16 divizori, sunt 16 progresii cu această proprietate 1 punct

3. Fie triunghiul ABC , M mijlocul laturii (BC) și punctele P, Q, R astfel încât $\overline{AP} = x \cdot \overline{AB}$, $\overline{AQ} = y \cdot \overline{AM}$ și $\overline{AR} = z \cdot \overline{AC}$, cu $x, y, z \in (0; +\infty)$. Arătați că:

a) $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$

b) $\overline{PQ} = \left(\frac{y}{2} - x\right) \cdot \overline{AB} + \frac{y}{2} \cdot \overline{AC}$

c) Punctele P, Q, R sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$

Soluție:

a) $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} = \overline{AB} + \frac{1}{2} \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}) = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$ 1 punct

b) $\overline{PQ} = \overline{AQ} - \overline{AP}$ 1 punct

$\overline{AQ} = y \cdot \overline{AM} = \frac{y}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{AC})$ 1 punct

$\overline{PQ} = \left(\frac{y}{2} - x\right) \overline{AB} + \frac{y}{2} \cdot \overline{AC}$ 1 punct

c) P, Q, R sunt coliniare dacă și numai dacă sunt coliniari vectorii \overline{PQ} și \overline{PR} 1 punct

$\overline{PR} = z \cdot \overline{AC} - x \cdot \overline{AB}$ 1 punct

\overline{PQ} și \overline{PR} sunt coliniari $\Leftrightarrow \frac{y-2x}{-2x} = \frac{y}{2z} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$ 1 punct

4. Un turist parcurge un traseu $ABCD$ format din trei drumuri, AB , BC și CD , toate de aceeași lungime egală cu 60 km. Turistul merge pe drumurile specificate cu vitezele v_1, v_2 , respectiv v_3 , măsurate în km/h .

a) Dacă $v_1 = 30$, $v_2 = 20$ și $v_3 = 50$, determinați durata t_1 a parcurgerii întregului traseu, măsurată în ore și minute.

b) Dacă turistul ar parcurge întregul traseu cu viteza medie $v = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3}$ a celor trei viteze de la punctul anterior, determinați durata t_2 a parcurgerii întregului traseu, măsurată în ore și minute.

c) Arătați că, oricare ar fi vitezele v_1, v_2 , respectiv v_3 , are loc inegalitatea $t_1 \geq t_2$.

Soluție:

a) $t_1 = \frac{60km}{v_1} + \frac{60km}{v_2} + \frac{60km}{v_3}$ 1 punct

$= \dots = 6h$ și $12 min$ 1 punct

b) $v = \frac{100}{3} km/h \Rightarrow t_2 = \frac{180}{v} = 5h$ și $24 min$ 1 punct

c) $t_1 = 60 \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right)$ 1 punct

$t_2 = 540 \cdot \left(\frac{1}{v_1 + v_2 + v_3}\right)$ 1 punct

$t_1 \geq t_2 \Leftrightarrow (v_1 + v_2 + v_3) \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right) \geq 9$ 1 punct

Demonstrarea inegalității 1 punct



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A X-A

1. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuațiile:

a) $5^{2x+1} = 4 \cdot 5^x + 1$

b) $x^2 + 2\sqrt{x^2 - 3x - 4} = 3x + 4$

c) $\log_4(3x - 2) \cdot \log_x 2 = 1$

Soluție:

a) $5^x = y \Rightarrow 5y^2 - 4y - 1 = 0 \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = -\frac{1}{5}$ 1 punct

$5^x = 1 \Rightarrow x = 0, 5^x = -\frac{1}{5}$ nu are soluție. 1 punct

b) $x^2 - 3x - 4 \geq 0, x \in (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$ 1 punct

$x^2 - 3x - 4 + 2\sqrt{x^2 - 3x - 4} = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x \in \{-1; 4\}$ 1 punct

c) $x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$ 1 punct

$\log_4(3x - 2) = \frac{\log_2(3x - 2)}{2}; \log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$ 1 punct

și se obține ecuația $x^2 - 3x + 2 = 0$ cu soluții $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$ dintre care acceptată de condiția

$x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$ este numai $x = 2$ 1 punct

2. Venitul lunar al unui tehnoredactor este format din salariul de bază de 800 lei la care se adaugă un spor astfel: dacă reușește să tehnoredacteze până la 200 pagini i se dă un comision de 2 lei pentru fiecare pagină scrisă iar pentru fiecare pagină ce depășește 200 primește 3 lei pentru fiecare pagină.

a) Determinați câți bani primește tehnoredactorul dacă într-o lună scrie 150 pagini. Dar dacă scrie 250 pagini?

b) Arătați că funcția pe baza căreia se calculează venitul lunar al tehnoredactorului este

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} 2n + 800, & \text{dacă } n \leq 200 \\ 3n + 600, & \text{dacă } n > 200 \end{cases}$$

unde n este numărul de pagini scrise de tehnoredactor.

c) Determinați câte pagini trebuie să scrie tehnoredactorul pentru a câștiga într-o lună 1620 lei.

Soluție:

a) Dacă scrie 150 pagini, câștigă $800 + 150 \cdot 2 = 1100$ lei 1 punct

Dacă scrie 250 pagini, câștigă $800 + 200 \cdot 2 + 50 \cdot 3 = 1350$ lei 2 puncte

- b) Dacă $n \leq 200 \Rightarrow f(n) = 800 + 2n$ 1 punct
 Dacă $n > 200 \Rightarrow f(n) = 800 + 200 \cdot 2 + (n - 200) \cdot 3 = 3n + 600$ 1 punct
 c) $n \leq 200 \Rightarrow 2n + 800 = 1620 \Rightarrow n = 410$, contradicție 1 punct
 $n > 200 \Rightarrow 3n + 600 = 1620 \Rightarrow n = 340$, 1 punct

3. Considerăm numerele complexe $z_a = \frac{1-a \cdot i}{1+a \cdot i}$, $a \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.

a) Determinați modulul și forma algebrică a numărului z_a

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $z_a = \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \cdot i$

c) Arătați că $(z_{\sqrt{3}})^{2016}$ este număr real.

Soluție:

a) $|z_a| = 1$ 1 punct

$z_a = \frac{1-a^2}{1+a^2} - \frac{2a}{1+a^2} \cdot i$ 2 puncte

b) $z_a = \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \cdot i \Rightarrow \frac{1-a^2}{1+a^2} = \frac{3}{5}$, $-\frac{2a}{1+a^2} = -\frac{4}{5}$ 1 punct

$a = \frac{1}{2}$ 1 punct

c) $(z_{\sqrt{3}})^3 = 1 \Rightarrow (z_{\sqrt{3}})^{2016} = 1 \in \mathbb{R}$ 2 puncte

4. a) Arătați că $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $3^{2n} > 3n + 99$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

c) Determinați numerele naturale n, a, b și c , știind că $a + b + c = 3^n$ și $a^2 + b^2 + c^2 = 33 + n$.

Soluție.

a) Inegalitatea este echivalentă cu $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$, adevărat 1 punct

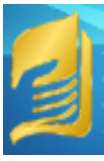
b) Inductiv: $n = 3$, $3^6 > 108$, adevărat

Dacă $3^{2k} > 3k + 99$, $k \geq 3$, atunci $3^{2k+2} = 3^{2k} \cdot 9 > (3k + 99) \cdot 9 > 3 \cdot (k + 1) + 99$ 2 puncte

c) Fie a, b, c în condiția cerută, conform cu a) $\Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \Rightarrow 3(33 + n) \geq 3^{2n}$ și folosind b) $\Rightarrow n \in \{0; 1; 2\}$ 2 puncte

Pentru $n = 0$ și $n = 1$ nu avem soluții 1 punct

Pentru $n = 2$, $a + b + c = 9$, $a^2 + b^2 + c^2 = 35$, cu soluția $(a; b; c) = (1; 3; 5)$ și orice permutare a acestora. 1 punct



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XI-A

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se cere:

- a) Arătați că $A^n = n \cdot A - (n-1) \cdot I_2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- b) Demonstrați că nu există $X \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3 \cdot X - X \cdot A^3 = B$.
- c) Arătați că egalitatea $(A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$ este adevărată dacă și numai dacă $a \cdot c = 0$.

Soluție:

a) Verificare prin inducție. $n = 2$, $A^2 = 2 \cdot A - I_2$ 1 punct

Dacă $A^k = k \cdot A - (k-1) \cdot I_2$, atunci $A^{k+1} = A^k \cdot A = \dots = (k+1) \cdot A - k \cdot I_2$ 1 punct

b) Presupunem X cu proprietatea cerută, \Rightarrow

$$A^3 \cdot X - X \cdot A^3 = (3 \cdot A - 2 \cdot I_2) \cdot X - X \cdot (3 \cdot A - 2 \cdot I_2) = 3 \cdot (A \cdot X - X \cdot A) = B \Leftrightarrow A \cdot X - X \cdot A = \frac{1}{3} \cdot B$$

..... 1 punct

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \cdot z & a \cdot (t-x) \\ 0 & -z \cdot a \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$\Rightarrow a \cdot z = \frac{1}{3}$ și $a \cdot z = -\frac{1}{3}$, contradicție 1 punct

c) Cum $(A+B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$, cerința este echivalentă cu $A \cdot B = B \cdot A$ 1 punct

$$\text{iar } A \cdot B = B \cdot A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+a \cdot c & b+a \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b+a \\ c & a \cdot c + 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a \cdot c = 0 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

2. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 + x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3e^x - 2x + 1$. Se cere:

a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 1$

b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) \cdot g(x) - g(0) \cdot f(x)}{x}$

c) Determinați numerele $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot g(x+1) + b \cdot f(x)}{x}$ există și este egală cu 2.

Soluție:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + 1) = 1$ 1 punct

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^x - 2x - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 \cdot \frac{e^x - 1}{x} - 2 \right) = 1 \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) \cdot g(x) - g(0) f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 \cdot \frac{e^x - 1}{x} - 8x^2 - 6 \right) = -3 \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

c) Dacă $a \cdot g(1) + b \cdot f(0) \neq 0$, limitelale laterale $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{a \cdot g(x+1) + b \cdot f(x)}{x}$ și

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{a \cdot g(x+1) + b \cdot f(x)}{x}$ sunt fie $+\infty$, fie $-\infty$, deci în mod necesar

$$a \cdot g(1) + b \cdot f(0) = 0 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Dacă $a \cdot g(1) + b \cdot f(0) = 0$, atunci $b = -a \cdot (3e - 1)$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{a \cdot g(x+1) + b \cdot f(x)}{x} = -a$, din care

rezultă $a = -2$ și $b = 6e - 2$ 1 punct

3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 2 & c \end{pmatrix}$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se cere:

a) Arătați că $\det A = (a - b)(c - 3)$.

b) Demonstrați că pentru $a = 3, b = 2, c = 4$, matricea A este inversabilă și inversa A^{-1} are toate elementele numere întregi.

c) Determinați o matrice $C \in M_3(\mathbb{Z})$, inversabilă și astfel încât să aibă inversa C^{-1} cu toate elementele numere naturale.

Soluție:

a) $\det A = (a - b)(c - 3) \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1, \text{ deci } \det A \neq 0, \Rightarrow A \text{ inversabilă} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -4 & 7 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

c) Alegând $C = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -4 & 7 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

4. O sursă de căldură încălzește uniform un corp. Experimental, constatăm că temperatura corpului este dată de legea $T(t) = a \cdot t^b + c - \sqrt{t^2 + d \cdot t + 25}$, cu $a, b, c, d > 0$, unde numărul $t \geq 0$ reprezintă momentul măsurării, exprimat în minute, iar numărul $T(t)$ reprezintă temperatura corpului, exprimată în grade Celsius, la fiecare moment $t \geq 0$ ales. Se știe că la momentul inițial $t = 0$ temperatura corpului este de 7 grade Celsius iar atunci când $t \rightarrow \infty$, temperatura corpului se apropie infinitesimal de 10 grade Celsius, adică $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = 10$.

a) Arătați că $c = 12$.

b) Demonstrați că $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = +\infty \cdot \operatorname{sgn}(b-1)$, unde $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{dacă } x > 0 \\ -1, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

c) Arătați că $T(t) = t + 12 - \sqrt{t^2 + 4t + 25}$.

d) Determinați la ce moment t temperatura corpului va fi de 9 grade Celsius.

e) Demonstrați că, la orice moment $t \geq 0$, temperatura corpului este strict mai mică de 10 grade Celsius.

Soluție:

a) $T(0) = 7 \Leftrightarrow c - 5 = 7 \Leftrightarrow c = 12$ 1 punct

b) $b > 1 \Rightarrow b - 1 > 0$ și $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[t \cdot \left(a \cdot t^{b-1} + \frac{c}{t} - \sqrt{1 + \frac{d}{t} + \frac{25}{t^2}} \right) \right] = \infty \cdot \infty = \infty$ 1 punct

$b < 1 \Rightarrow 1 - b > 0$ și $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[t \cdot \left(\frac{a}{t^{1-b}} + \frac{c}{t} - \sqrt{1 + \frac{d}{t} + \frac{25}{t^2}} \right) \right] = \infty \cdot (-1) = -\infty$ 1 punct

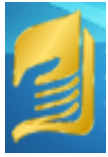
c) Dacă $b = 1$, din $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = 10$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \left[t \cdot \left(a + \frac{c}{t} - \sqrt{1 + \frac{d}{t} + \frac{25}{t^2}} \right) \right] = 10 \Rightarrow a = 1$ 1 punct

și atunci $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(t + 12 - \sqrt{t^2 + d \cdot t + 25} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t(24 - d) + 119}{t + 12 + \sqrt{t^2 + d \cdot t + 25}} = \frac{24 - d}{2} = 10$,

deci $d = 4$ 1 punct

d) $T(t) = 9 \Leftrightarrow t + 3 = \sqrt{t^2 + 4t + 25} \Rightarrow t = 8$ 1 punct

e) $T(t) < 10 \Leftrightarrow t + 2 < \sqrt{t^2 + 4t + 25} \Leftrightarrow t^2 + 4t + 4 < t^2 + 4t + 25$, adevărat 1 punct



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XII-A

1. Fie funcția $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$. Se cere:

a) Determinați primitiva $F : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f , știind că $F(0) = 0$.

b) Calculați $\int_0^{e-1} f(x) dx$.

c) Dacă $g : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă încât pentru orice $x \geq 0$ se verifică egalitatea

$$x + \int_0^x g(t) dt = (x+1) \cdot g(x), \text{ arătați că } g = f.$$

Soluție:

a) $F(x) = \int \ln(x+1) dx = \int (x+1)' \cdot \ln(x+1) dx = (x+1) \cdot \ln(x+1) - \int dx =$

$= (x+1) \cdot \ln(x+1) - x + C, (\forall) C \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

$F(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

b) $\int_0^{e-1} f(x) dx = F(e-1) - F(0) = 1 \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

c) $G(x) = (x+1) \cdot g(x) - x$ este primitivă a funcției g și $G(0) = 0 \Rightarrow$ deducem $(x+1) \cdot g'(x) = 1$ și $g(0) = 0 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$g(x) = \ln(x+1) \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

2. Definim pe mulțimea numerelor reale legea de compoziție $x \circ y = xy + 2x + 2y$. Se cere:

a) Arătați că legea "o" nu este asociativă.

b) Cercetați dacă structura algebrică $(\mathbb{R}; \circ)$ admite element neutru.

c) Găsiți două numere $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$.

d) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n^3 \circ n \neq 2016$.

Soluție:

a) Spre exemplu, $(0 \circ 1) \circ 2 \neq 0 \circ (1 \circ 2) \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

b) Dacă $e \in \mathbb{R}$ este element neutru, atunci $x \circ e = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow xe + 2x + 2e = x \Rightarrow e(x+2) = -x \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

și folosind unicitatea elementului neutru sau alegând $x = -2 \Rightarrow 0 = -2$, rezultă că $(\mathbb{R}; \circ)$ nu are element neutru. $\dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

c) Observând $x \circ y = (x+2)(y+2) - 4$, se poate alege, spre exemplu, $a = \sqrt{3} - 2$, $b = 2\sqrt{3} - 2$ și cu aceste numere avem $a \circ b = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} - 4 = 2 \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

d) Fie $n^3 \circ n = 2016$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^4 + 2n^3 + 2n = 2016$ și considerând $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n^4 + 2n^3 + 2n$, este strict crescătoare. Dar $f(6) < 2016$, $f(7) > 2016 \Rightarrow f(n) \neq 2016$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$

..... 1 punct

3. În cadrul unui experiment, o sursă de căldură încălzește un corp astfel încât temperatura corpului, notată $t(x)$ și măsurată în grade Celsius, se modifică la fiecare moment $x \in [0; +\infty)$ al măsurării, exprimat în minute, prin funcția

$$t: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, t(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & \text{dacă } x \in [0; 3] \\ 5x - 1, & \text{dacă } x \in (3; 6) \\ 29, & \text{dacă } x \in [6; +\infty) \end{cases}$$

a) Arătați că funcția $t: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ admite primitive și este integrabilă pe orice $[a; b] \subset [0; +\infty)$.

b) Știind că $M(a; b) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$ exprimă valoarea medie a unei funcții f care este integrabilă pe un interval $[a; b] \subset \mathbb{R}$, calculați temperatura medie înregistrată prin acest experiment pe intervalul momentelor $a = 4$ și $b = 8$.

c) Determinați după câte minute de la momentul inițial $x_0 = 0$, temperatura medie înregistrată atinge valoarea de 20 grade Celsius.

Soluție:

a) Singurele posibile puncte de discontinuitate sunt $x = 3$ și $x = 6$ și se constată t continuă și în aceste puncte, deci admite primitive 1 punct

Fiind continuă pe orice interval $[a; b] \subset [0; +\infty)$, este și integrabilă 1 punct

b) Conform cu formula de medie, temperatura medie pentru intervalul momentelor $a = 4$ și $b = 8$ este $M(4; 8) = \frac{1}{4} \int_4^8 t(x) dx = \frac{1}{4} \left(\int_4^6 t(x) dx + \int_6^8 t(x) dx \right)$ 1 punct

$$\frac{1}{4} \int_4^6 t(x) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{5x^2}{2} - x \right) \Big|_4^6 = 12 \text{ 1 punct}$$

$$\frac{1}{4} \int_6^8 t(x) dx = \frac{1}{4} \cdot 29x \Big|_6^8 = 14,5, \text{ deci } M(4; 8) = 26,5 \text{ grade Celsius 1 punct}$$

c) Trebuie determinat x astfel încât $M(0; x) = 20$, adică $\frac{1}{x} \cdot \int_0^x t(u) du = 20$

$$x \in [0; 3] \Rightarrow M(0; x) = \frac{1}{x} \int_0^x (u^2 + u + 2) du = \frac{1}{x} \left(\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + 2u \right) \Big|_0^x = \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + 2 \leq \frac{13}{2} < 20$$

$$x \in (0; 6) \Rightarrow M(0; x) = \frac{1}{x} \int_0^x t(u) du = \frac{1}{x} \left[\int_0^3 t(u) du + \int_3^x t(u) du \right] = \frac{5x}{2} - 1 < 20 \text{ 1 punct}$$

$$x \in [6; +\infty) \Rightarrow M(0; x) = \frac{1}{x} \int_0^x t(u) du = \frac{1}{x} \left[\int_0^6 t(u) du + \int_6^x t(u) du \right] = \frac{1}{x} (29x - 90)$$

și ecuația $\frac{1}{x} (29x - 90) = 20$ are soluția $x = 10$ 1 punct

4. Fie mulțimea $M = \{a^2 - ab + b^2 / a, b \in \mathbb{Z}\}$ și numărul complex $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $i^2 = -1$.

a) Arătați că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ și $\varepsilon^3 = 1$

b) Arătați că, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, se verifică egalitatea $a^2 - ab + b^2 = (a + \varepsilon \cdot b)(a + \bar{\varepsilon} \cdot b)$,

unde $\bar{\varepsilon} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ este conjugatul numărului complex $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

c) Demonstrați egalitatea $(a_1^2 - a_1b_1 + b_1^2) \cdot (a_2^2 - a_2b_2 + b_2^2) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$,

unde $\alpha = a_1a_2 - b_1b_2$, $\beta = a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2$ și $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$.

d) Găsiți două numere $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(2016^2 - 2016 \cdot 2015 + 2015^2)^2 = \alpha^2 - \alpha \cdot \beta + \beta^2$.

Soluție:

a) Justifică $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$ și $\varepsilon^3 = 1$ 1 punct

b) $(a + \varepsilon \cdot b)(a + \bar{\varepsilon} \cdot b) = a^2 + (\varepsilon + \bar{\varepsilon}) \cdot ab + (\varepsilon \cdot \bar{\varepsilon}) \cdot b^2 = a^2 - ab + b^2$ 2 puncte

c) Se demonstrează implicația $x, y \in M \Rightarrow x \cdot y \in M$

$x = a_1^2 - a_1b_1 + b_1^2 = (a_1 + \varepsilon \cdot b_1)(a_1 + \bar{\varepsilon} \cdot b_1)$, $y = a_2^2 - a_2b_2 + b_2^2 = (a_2 + \varepsilon \cdot b_2)(a_2 + \bar{\varepsilon} \cdot b_2)$ 1 punct

$\Rightarrow x \cdot y = (a_1 + \varepsilon \cdot b_1)(a_2 + \varepsilon \cdot b_2) \cdot \overline{(a_1 + \varepsilon \cdot b_1)(a_2 + \varepsilon \cdot b_2)} =$ 1 punct

$= (\alpha + \varepsilon \cdot \beta) \cdot \overline{(\alpha + \varepsilon \cdot \beta)} = \alpha^2 - \alpha \cdot \beta + \beta^2$, cu $\alpha = a_1a_2 - b_1b_2$, $\beta = a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2$ 1 punct

d) Folosim punctul c) pentru $a_1 = a_2 = 2016$, $b_1 = b_2 = 2015$ și obținem $\alpha = 4031$, $\beta = 2015 \cdot 2017$

..... 1 punct