INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN
BRĂILA

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014

CLASA a VII-a

1. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $m(\sphericalangle A) < 90^\circ$. Dacă $AM \perp BC$, $M \in BC$, $AQ \perp CD$, $Q \in CD$, $CN \perp AB$, $N \in AB$ şi $CP \perp AD$, $P \in AD$, atunci demonstraţi că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi.

Daniela Tilincă şi Adriana Mihăilă, Brăila

2. Determinaţi numerele de forma $\overline{ab}$ astfel încât $\sqrt{a+\sqrt{\overline{ab}}} = a$.

Supliment, G.M., noiembrie 2013

3. Fie dreptunghiul $ABCD$ şi punctele M pe (AB), P, Q pe (AD) şi R, T pe (BC). Demonstraţi că centrele de greutate ale triunghiurilor MPR, MPT, MQR şi MQT sunt coliniare.

Daniela şi Nicolae Stănică, Brăila

4. Determinaţi numerele întregi x şi y pentru care:

$$\left||x-3|+|y-2x|\right| = 3.$$

Supliment, G.M., noiembrie 2013

Notă:
1. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
2. Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN
BRĂILA

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014

CLASA a VII-a

1. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $m(\sphericalangle A) < 90^\circ$. Dacă $AM \perp BC$, $M \in BC$, $AQ \perp CD$, $Q \in CD$, $CN \perp AB$, $N \in AB$ şi $CP \perp AD$, $P \in AD$, atunci demonstraţi că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi.

Daniela Tilincă şi Adriana Mihăilă, Brăila

Soluţie:

$\Delta DPC \equiv \Delta AMB (I.U.) \Rightarrow PC = AM; \sphericalangle PCD \equiv \sphericalangle BAM; DP = BM$ **1p**

$\Delta QAD \equiv \Delta BCN (I.U.) \Rightarrow CN = QA; \sphericalangle QAD \equiv \sphericalangle BCN; QD = BN$ **1p**

$\Delta PCN \equiv \Delta QAM (L.U.L.) \Rightarrow QM = PN (1)$ **2p**

$\Delta QDP \equiv \Delta MBN \Rightarrow QP = MN (2)$; din (1)+(2) $\Rightarrow MNPQ$ paralelogram

$AQCN$ dreptunghi $\Rightarrow QN = AC$ (3) **1p**

$AMCP$ dreptunghi $\Rightarrow PM = AC$ (4) **1p**

din relaţiile (3)+(4) $\Rightarrow QN = PM \Rightarrow MNPQ$ dreptunghi **1p**

2. Determinaţi numerele de forma $\overline{ab}$ astfel încât $\sqrt{a+\sqrt{\overline{ab}}} = a$.

Supliment, G.M., noiembrie 2013

Soluţie:

$\sqrt{\overline{ab}} = a^2 - a = a(a-1)$ **3p**

$\overline{ab} \vdots 2$ şi $\overline{ab}$ pătrat perfect **2p**

Finalizare: $\overline{ab} = 36$ **2p**

3. Fie dreptunghiul *ABCD* şi punctele *M* pe (*AB*), *P*, *Q* pe (*AD*) şi *R*, *T* pe (*BC*). Demonstraţi că centrele de greutate ale triunghiurilor *MPR*, *MPT*, *MQR* şi *MQT* sunt coliniare.

Daniela şi Nicolae Stănică, Brăila

Soluție:

E şi F mijloacele segmentelor [*MR*] şi [*MT*] şi G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor MPR, MPT, MQR, MQT

$G_1G_2 \parallel EF$ (R.T. Thales) şi $BC \parallel EF$ (linie mijlocie) $\Rightarrow G_1G_2 \parallel BC$ **2p**

$G_1G_3 \parallel PQ$ (R.T. Thales) şi $BC \parallel PQ$ (linie mijlocie) $\Rightarrow G_1G_3 \parallel BC$ **2p**

$G_2G_4 \parallel PQ$ (R.T. Thales) şi $BC \parallel PQ$ (linie mijlocie) $\Rightarrow G_2G_4 \parallel BC$ **2p**

Finalizare: G_1, G_2, G_3, G_4 coliniare **1p**

4. Determinaţi numerele întregi *x* şi *y* pentru care:

$$\left| |x-3| + |y-2x| \right| = 3.$$

Supliment, G.M., noiembrie 2013

Soluție:

$|x-3| + |y-2x| = 3$ **2p**

$|x-3|, |y-2x| \in \mathbb{N}$ **1p**

$|x-3| \in \{0,1,2,3\}$ **1p**

Finalizare:

$(3,9);(3,3);(4,10);(4,6);(2,6);(2,2);(5,11);(5,9);(1,3);(1,1);(0,0);(6,12)$ **3p**