Olimpiada națională de matematică, faza locală, județul Caraș-Severin, 2016

Clasa a IX-a

I. Pentru orice numere naturale nenule *m* și *n* se notează $E(m,n)=\sqrt{m^2+3n}$.

(a) Determinaţi numerele naturale *m* pentru care $(m+1)\cdot E(m,m)=3m+1$.

(b) Calculaţi partea întreagă a numărului $E(n,n)$.

(c) Arătaţi că dacă $m,n,p\in\mathbb{N}^*$ şi $m^2+n^2<2p^2$, atunci $E(m,m)\cdot E(n,n)<E^2(p,p)$.

Articol RMCS nr. 25, enunţ modificat, Lucian Dragomir

II. Se consideră un triunghi *ABC* și punctele *M, N, P* pe laturile $[BC]$,$[AC]$, respectiv $[AB]$, pentru care $\frac{BM}{BC}=\frac{CN}{CA}=\frac{AP}{AB}=\frac{1}{3}$.

Demonstraţi că, dacă $2\cdot\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{PN}$ şi $2\cdot\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}$, atunci $\overrightarrow{AM}=2\cdot\overrightarrow{EF}$.

Gazeta Matematică (12/2014, Nicolae Stăniloiu)

III. Se consideră o mulţime M de numere reale care are următoarele două proprietăţi:

(1) $1\in M$.

(2) dacă $x\in M$ şi $(x+2y)\in M$, atunci $y\in M$.

Arătaţi că:

(a) $\frac{1}{4}\in M$;

(b) $\frac{1}{2^n}\in M$ pentru orice număr natural n.

Gazeta Matematică(supliment 12/2014, Lucian Dragomir)

IV. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x-3$ și mulţimea $M_f=\{g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,f\circ g=g\circ f\}$.

(a) Arătaţi că $M_f\neq\varnothing$.

(b) Demonstraţi că dacă $g\in M_f$, atunci $g(1)$ este un număr întreg.

Lucian Dragomir

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada naţională de matematică
Etapa locală, 5 martie 2016, Caraş - Severin

Clasa a IX a (Barem de corectare și notare)

1. Pentru orice numere naturale nenule *m* și *n* se notează $E(m,n)=\sqrt{m^2+3n}$.

(a) Determinaţi numerele naturale *m* pentru care $(m+1)\cdot E(m,m)=3m+1$.

(b) Calculaţi partea întreagă a numărului $E(n,n)$.

(c) Arătaţi că dacă $m,n,p\in\mathbb{N}^*$ și $m^2+n^2<2p^2$, atunci $E(m,m)\cdot E(n,n)<E^2(p,p)$.

(a) $E(m,m)=\dfrac{3m+1}{m+1}<3\Rightarrow m\in\{0,1\}$; singura soluţie a problemei: $m=1$	(3p)
(b) Deoarece $n^2+2n+1\le n^2+3n<n^2+4n+4,\forall n\in\mathbb{N}^*$, deducem $n+1\le E(n,n)<n+2$, deci $[E(n,n)]=n+1$	(2p)
c) Inegalitatea mediilor conduce la $E(m,m)E(n,n)\le\dfrac{m^2+n^2+3(m+n)}{2}$. Folosind $(m+n)^2\le 2\left(m^2+n^2\right)$ rezultă $E(m,m)E(n,n)\le\dfrac{m^2+n^2+3\sqrt{2(m+n)}}{2}<\dfrac{2p^2+6p}{2}=E^2(p,p)$	(2p)

2. Se consideră un triunghi *ABC* și punctele *M, N, P* pe laturile $[BC],[AC]$, respectiv $[AB]$, pentru care $\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{CN}{CA}=\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{1}{3}$. Demonstraţi că, dacă $2\cdot\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{PN}$ și $2\cdot\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}$, atunci $\overrightarrow{AM}=2\cdot\overrightarrow{EF}$.

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$	(2p)
$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CF}=...=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}$	(5p)
Soluţie alternativă : Fie *T* un punct pe *(BC)* astfel ca $CT=\dfrac{1}{3}CB$ .Deducem că *TNAP* este paralelogram,deci *AT* trece prin mijlocul lui *(PN)*, adică *A,E,T* sunt coliniare și *E* este mijlocul lui *(AT)*;cum *F* este mijlocul lui *(MT)* , avem că *EF* este linie mijlocie în *ATM* , de unde concluzia e imediată.	

3. Se consideră o mulţime *M* de numere reale care are următoarele două proprietăţi:

(1) $1\in M$.

(2) dacă $x\in M$ și $(x+2y)\in M$, atunci $y\in M$.

Arătaţi că:

(a) $\dfrac{1}{4}\in M$; (b) $\dfrac{1}{2^n}\in M$ pentru orice număr natural *n*.

$1+2\cdot 0\in M\Rightarrow 0\in M$; $0+2\cdot\dfrac{1}{2}=1\in M\Rightarrow\dfrac{1}{2}\in M$ și $0+2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\in M\Rightarrow\dfrac{1}{4}\in M$	(3p)
Acum, $\dfrac{1}{2^0}\in M$, iar dacă $\dfrac{1}{2^n}\in M$, deducem	(4p)

$0+2\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n}\in M \Rightarrow \frac{1}{2^{n+1}}\in \mathrm{M}$ .Demonstraţia este astfel încheiată prin inducţie matematică.	

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x-3$ și mulţimea $M_f=\{g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,f\circ g=g\circ f\}$.

(a) Arătaţi că $M_f\neq\varnothing$.

(b) Demonstraţi că dacă $g\in M_f$, atunci $g(1)$ este un număr întreg.

(a) de exemplu $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{x+3}{4}$ sau $g(x)=1$	(3p)
(b) $f(a)=a\Rightarrow a=1$, așadar singurul număr real *a* pentru care avem $f(a)=a$ este $a=1$ (*)	(1p)
$f(g(1))=g(f(1))\Rightarrow f(g(1))=g(1)$; în baza observaţiei (*) se ajunge la $g(1)=1\in\mathbb{Z}$	(3p)