INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
etapa locală februarie 2016
SUBIECT si BAREM Clasa a VII-a

PROBLEMA 1

Este dat următorul şir de numere: $a_1 = 1 + 1^{-1}, a_2 = 1 + 2^{-1}, a_3 = 1 + 3^{-1}, \dots, a_{2016} = 1 + 2016^{-1}$.

a) Comparați a_{2016} cu a_{2011}.
b) Arătați că produsul $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{2016}$ este un număr natural.
c) Determinați numărul $n \in \mathbb{N}^*$, pentru care $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} \in \mathbb{N}$.

Solutie:

a) $a_{2011} = 1 + 2011^{-1} = 1 + \frac{1}{2011} > 1 + \frac{1}{2016} = 1 + 2016^{-1} = a_{2016} \Rightarrow a_{2011} > a_{2016}$ 2p

b) $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2016} = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1+\frac{1}{2016}\right) =$ 2p

$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2017}{2016} = 2017 \in \mathbb{N}$ 1p

c) $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+3}{n+2} = \frac{n+3}{n} = 1 + \frac{3}{n} \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n \in \{1, 3\}$ 2p

PROBLEMA 2

Rezolvați in mulțimea numerelor întregi ecuația : $5(x-1) + 7(y+3) = 6(x-1)(y+3)$.

(Gazeta Matematică)

Solutie:

$5x - 5 + 7y + 21 = 6(xy + 3x - y - 3)$

$13x - 13y + 6xy = 34$ 2p

$x = \frac{34+13y}{6y+13}$ 1p

$x \in Z \Rightarrow \frac{34+13y}{6y+13} \in Z$... $\cdot 6$ 1p

$13 + \frac{45}{6y+13} \in Z, 13 \in Z \Rightarrow 6y + 13 \in D_{45}$ 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

$y \in \{-2, -3\}$...1p

$x \in \{8, -1\}$...1p

PROBLEMA 3

În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\angle A) = 90^0$) şi $AB > AC$ considerăm AD bisectoarea $\angle BAC$, $(D \in (BC))$ şi $CE \perp AD$, $(E \in (AB))$.Ştiind că $[CE] \equiv [BE]$ se cere:

a) Demonstraţi că $[DC] \equiv [DE]$.

b) Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului *ABC*.

<u>Solutie:</u>

a) Desen 1p

In ΔACE avem AD bisectoarea si inaltime, deci ΔACE este isoscel cu $[AC] \equiv [AE]$ 1p

Acum $\Delta ADC \equiv \Delta ADE$ 1p

De aici $[DE] \equiv [DC]$ 1p

b) ΔACE fiind dreptunghic si isoscel rezulta ca $m(\angle AEC) = 45^0$ 1p

dar $\angle AEC$ este un unghi exterior triunghiului isoscel *BEC* rezulta ca

$m(\angle EBC) = 22^0 30'$ 1p

Atunci $m(\angle ACB) = 67^0 30'$ ....1p.

PROBLEMA 4

Fie ABCD un dreptunghi ale cărui diagonale se intersectează in punctul O.Pe diagonala BD se consideră punctele R,T astfel încât $[BR] \equiv [TD]$.Arătaţi că:

a) O este mijlocul [RT]

b) ARCT este paralelogram.

<u>Solutie:</u>

a) ABCD dreptunghi,[AC],[BD] diagonale$\Rightarrow [BO] \equiv [OD]$...1p

$R, T \in [BD]; [BR] \equiv [TD] \Rightarrow O$ mijlocul segmentului [RT]...2p

b) ABCD dreptunghi,[AC],[BD] diagonale$\Rightarrow [AO] \equiv [OC]$...1p

O mijlocul segmentului [RT]...2p