

Olimpiada Nationala de Matematica
etapa locala- 16 februarie 2013
Clasa a VIII-a

Subiecte

Varianta 3

1. a) Știind că $x^2 + y^2 - 8x\sqrt{3} - 6y\sqrt{2} + 66 = 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, comparați numerele z și t , unde

$$z = \frac{[x] - [y]}{[-x] - [-y]} \text{ și } t = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

b) Știind că $x + \frac{1}{x} = 10$, calculați valoarea expresiei $E(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$

2. Determinați $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ astfel încât numărul $a = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$ să fie

element al mulțimii $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / |x| < \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} \right\}$.

3. Triunghiurile ABC și ADE sunt în plane diferite și au mediana AM comună. Considerăm punctele P, Q, R, S situate respectiv pe segmentele [AB], [AC], [AD], [AE] astfel încât $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QD} = \frac{AR}{RC} = \frac{AS}{SE}$.

a) Să se arate că PRQS este paralelogram.

b) Dacă $AB^2 + AC^2 = AD^2 + AE^2$, atunci PRQS este dreptunghi.

4. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m\angle A = 90^\circ$) cu $AB = 30$ cm, $AC = 40$ cm. În punctul A se ridică perpendiculara AM pe planul (ABC), $AM = 24$ cm.

a) Determinați măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (MBC) și (ABC)

b) Arătați că piciorul perpendicularei din A pe planul (MBC) este ortocentrul triunghiului MBC.

NOTA : Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.

Olimpiada Națională de Matematică
- etapa locală – 16 februarie 2013
Județul Argeș
Clasa a VIII-a

Varianta 3

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

1. a) Știind că $x^2 + y^2 - 8x\sqrt{3} - 6y\sqrt{2} + 66 = 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, comparați numerele z și t , unde

$$z = \frac{[x] - [y]}{[-x] - [-y]} \text{ și } t = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

(3p)

SOLUTIE

$$(x - 4\sqrt{3})^2 + (y - 3\sqrt{2})^2 = 0 \Rightarrow x = 4\sqrt{3} \text{ și } y = 3\sqrt{2}$$

(2p)

$$z = \frac{[4\sqrt{3}] - [3\sqrt{2}]}{[-4\sqrt{3}] - [-3\sqrt{2}]} \Rightarrow z = \frac{6 - 4}{-7 - (-5)} = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow z < t$$

(1p)

b) Știind că $x + \frac{1}{x} = 10$, calculați valoarea expresiei $E(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$

(4p)

SOLUTIE

$$\text{Obținem succesiv: } x^2 + \frac{1}{x^2} = 98; x^3 + \frac{1}{x^3} = 970; x^4 + \frac{1}{x^4} = 9602$$

(3p)

$$E(x) = 10 + 98 + 970 + 9602 = 10680$$

(1p)

2. Determinați $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ astfel încât numărul $a = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$ să fie

element al mulțimii $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / |x| < \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} \right\}$.

(7p)

SOLUTIE

$$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}$$

(2p)

$$-3 + \sqrt{2} < x < 3 - \sqrt{2} \text{ și cum } x \text{ este număr real } \Rightarrow A = (-3 + \sqrt{2}; 3 - \sqrt{2})$$

(2p)

$$a = \frac{\sqrt{2}-1}{1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} + \dots + \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{1} \dots\dots\dots$$

(1p)

$$a = \sqrt{n}-1 \in (-3+\sqrt{2}; 3-\sqrt{2}) \Rightarrow \sqrt{n} < 4-\sqrt{2}, \text{ dar } n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \Rightarrow n \in \{2; 3; 4; 5\} \dots\dots\dots$$

(2p)

3. Triunghiurile ABC și ADE sunt în plane diferite și au mediana AM comună. Considerăm punctele P, Q, R, S situate respectiv pe segmentele [AB], [AD], [AC], [AE] astfel încât

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QD} = \frac{AR}{RC} = \frac{AS}{SE}.$$

a) Să se arate că PRQS este paralelogram.

(3p)

b) Dacă $AB^2 + AC^2 = AD^2 + AE^2$, atunci PRQS este dreptunghi.

(4p)

SOLUTIE

a) AM mediană comună $\Rightarrow MD = ME$ și $MB = MC \Rightarrow BDCE$ paralelogram

$$\Rightarrow BD \parallel CE \text{ și } BE \parallel DC \dots\dots\dots$$

(1p)

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QD} \Rightarrow PQ \parallel BD. \text{ Analog, } QR \parallel CD, SR \parallel EC, SP \parallel BE \Rightarrow PQ \parallel SR, QR \parallel SP \Rightarrow PQRS$$

paralelogram
(2p)

b) Aplicăm teorema medianei în triunghiurile ABC și ADE și obținem:

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} \text{ și } AM^2 = \frac{2(AD^2 + AE^2) - DE^2}{4} \dots\dots\dots$$

(2p)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cum } AB^2 + AC^2 = AD^2 + AE^2 \Rightarrow BC = DE \\ \text{Dar } BDCE \text{ paralelogram} \end{array} \right\} \Rightarrow BDCE \text{ dreptunghi} \dots\dots\dots$$

(2p)

4. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m\angle A = 90^\circ$) cu $AB = 30$ cm, $AC = 40$ cm. În punctul A se ridică perpendiculara AM pe planul (ABC), $AM = 24$ cm.

a) Determinați măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (MBC) și (ABC)

(4p)

b) Arătați că piciorul perpendicularei din A pe planul (MBC) este ortocentrul triunghiului MBC.

(3p)

SOLUTIE

a) Dacă $AD \perp BC$, conform T_{3p} avem că $MD \perp BC$ și $m(\angle(MBC), (ABC)) = m(\angle MDA) \dots\dots\dots$

(2p)

Se calculează $AD = 24 \text{ cm}$ și cum $AM = 24 \text{ cm} \Rightarrow m(\angle MDA) = 45^\circ$

(2p)

b) Fie $H \in MD$ astfel încât $AH \perp MD$ și conform R_2T_{3p}

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow AH \perp (MBC) \\ MB \subset (MBC) \end{array} \right\} \Rightarrow MB \perp AH$$

$$\left. \begin{array}{l} AC \perp AB \\ AC \perp AM \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (MBA)$$

$$\left. \begin{array}{l} MB \subset (MBA) \\ \Rightarrow MB \perp AC \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow MB \perp (ACH) \\ CH \subset (ACH) \end{array} \right\} \Rightarrow CH \perp MB$$

$$\left. \begin{array}{l} MD \perp BC \\ H \in MD \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow H$ ortocentrul ΔMBC