INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 23.02.2014

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

a) Calculaţi $\frac{1}{6\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 10}+\ \ldots\ +\frac{1}{16\cdot 18}$.

***

b) Fie şirul $\frac{1}{2\cdot 4},\ \frac{1}{4\cdot 6},\ \frac{1}{6\cdot 8},\ \ldots,\ \frac{1}{(2n-2)\cdot 2n},\ \ldots$. Determinaţi grupul de termeni consecutivi a căror sumă este $\frac{3}{28}$.

RMT 3/2011

SUBIECTUL 2

Se consideră numerele $B=\overline{b\underbrace{00\ldots0}_{2n+1\text{ cifre}}b}$. Demonstraţi că $\sqrt{B}$ este număr iraţional.

GM 6-7-8/2012

SUBIECTUL 3

a) Fie P un punct situat în interiorul unui unghi propriu XOY. Prin punctul P se duce o dreaptă d, astfel încât $d\cap OX=\{A\}$, $d\cap OY=\{B\}$ şi $PN \parallel OX$, $N\in OY$, $PM \parallel OY$, $M\in OX$. Arătaţi că: $OA=\frac{OM\cdot AB}{BP}$ şi $OB=\frac{ON\cdot AB}{AP}$.

***

b) Fie P un punct situat în interiorul unui unghi propriu XOY. Prin punctul P se duc două drepte d_1 şi d_2, astfel încât $d_1\cap OX=\{A_1\}$, $d_1\cap OY=\{B_1\}$ $d_2\cap OX=\{A_2\}$, $d_2\cap OY=\{B_2\}$. Demonstraţi că dacă $\frac{1}{OA_1}+\frac{1}{OB_1}=\frac{1}{OA_2}+\frac{1}{OB_2}$, atunci [OP este bisectoarea unghiului XOY.

GM 1/2013

SUBIECTUL 4

Fie trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, $AC\cap BD=\{O\}$ şi $M\in (OA$, astfel încât $OM=OD$ şi $M\neq A$. Dacă $CN \parallel BM$, $N\in BD$, demonstraţi că AMDN este trapez isoscel.

Prof. Damian Marinescu

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CLASA a VII-a

<u>SUBIECTUL 1</u> a) Calculaţi $\frac{1}{6\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{16\cdot 18}$. b) Fie şirul $\frac{1}{2\cdot 4},\ \frac{1}{4\cdot 6},\ \frac{1}{6\cdot 8},\ \ldots,\ \frac{1}{(2n-2)\cdot 2n},\ \ldots$.

Determinaţi grupul de termeni consecutivi a căror sumă este $\frac{3}{28}$.

a) $\frac{1}{6\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{16\cdot 18}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{8\cdot 9}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\ldots+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{18}$.	3p
b) Exceptând factorul $\frac{1}{4}$ putem lua suma la grupul căutat: S = $\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}+\ldots+\frac{1}{(m-1)\cdot m}$.	1p
S = $\frac{1}{k}-\frac{1}{m}$. Avem $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{m}\right)=\frac{3}{28}$ sau $\frac{1}{k}-\frac{1}{m}=\frac{3}{7}$.	1p
Obţinem $k=\frac{7m}{3m+7}$. Avem $3m+7\mid 7m$, de unde $3m+7\mid(21m+49-21m)=49$.	1p
Cum $3m+7>10$, rezultă $3m+7=49$; $m=14$ şi apoi k=2. Grupul este: $\frac{1}{4\cdot 6},\ \frac{1}{6\cdot 8},\ \ldots,\ \frac{1}{26\cdot 28}$.	1p

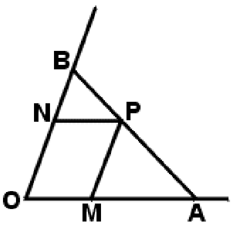
<u>SUBIECTUL 2</u> Se consideră numerele B = $\overline{b\underbrace{00\ldots0}_{2n+1\text{ cifre}}b}$. Demonstraţi că $\sqrt{B}$ este număr iraţional.

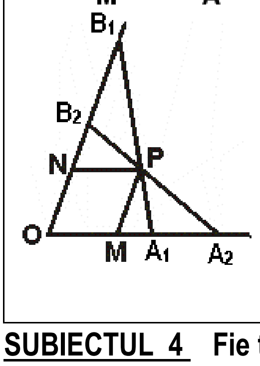
Dacă $b\in\{2, 3, 7, 8\}$, evident $\sqrt{B}$ este iraţional, deoarece B nu este pătrat perfect.	2p
Dacă b = 5, atunci B este divizibil cu 5, dar nu cu 25, de unde $\sqrt{B}$ este iraţional.	1p
Dacă b = 6, atunci B este divizibil cu 2, dar nu cu 4, de unde $\sqrt{B}$ este iraţional. (Sau $3\mid B$ şi $9\nmid B$).	1p
Pentru $b\in\{1, 4, 9\}$, atunci B=b$\cdot\overline{1\underbrace{00\ldots0}_{2n+1\text{ cifre}}1}$.	1p
Dar $\overline{1\underbrace{00\ldots0}_{2n+1\text{ cifre}}1}=\mathcal{M}_3+2$ (sau $(10^{n+1})^2<\overline{1\underbrace{00\ldots0}_{2n+1\text{ cifre}}1}<(10^{n+1}+1)^2$), deci nu-i pătrat perfect, de unde $\sqrt{B}$ este iraţional.	2p

<u>SUBIECTUL 3</u> a) Fie P un punct situat în interiorul unui unghi propriu XOY. Prin punctul P se duce o dreaptă d, astfel încât $d\cap OX=\{A\}$, $d\cap OY=\{B\}$, PN||OX, N$\in$OY, PM||OY, M$\in$OX. Arătaţi că: $OA=\frac{OM\cdot AB}{BP}$ şi $OB=\frac{ON\cdot AB}{AP}$.

b) Fie P un punct situat în interiorul unui unghi propriu XOY. Prin punctul P se duc două drepte d_1 şi d_2, astfel încât $d_1\cap OX=\{A_1\}$, $d_1\cap OY=\{B_1\}$ $d_2\cap OX=\{A_2\}$, $d_2\cap OY=\{B_2\}$. Demonstraţi că dacă $\frac{1}{OA_1}+\frac{1}{OB_1}=\frac{1}{OA_2}+\frac{1}{OB_2}$,

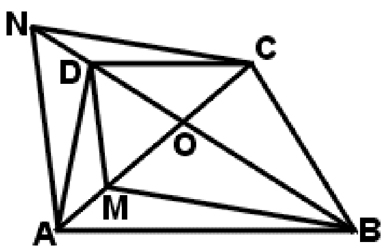
atunci [OP este bisectoarea unghiului XOY.





a) PM || OB $\Rightarrow\frac{OM}{OA}=\frac{BP}{AB}\Rightarrow OA=\frac{OM\cdot AB}{BP}$, PN || OA $\Rightarrow\frac{ON}{OB}=\frac{AP}{AB}\Rightarrow OB=\frac{ON\cdot AB}{AP}$.	2p
b) Din a) $OA_1=\frac{OM\cdot A_1B_1}{B_1P}$, $OA_2=\frac{OM\cdot A_2B_2}{B_2P}$, $OB_1=\frac{ON\cdot A_1B_1}{A_1P}$, $OB_2=\frac{ON\cdot A_2B_2}{A_2P}$.	1p
Înlocuind se obţine: $\frac{B_1P}{OM\cdot A_1B_1}+\frac{A_1P}{ON\cdot A_1B_1}=\frac{B_2P}{OM\cdot A_2B_2}+\frac{A_2P}{ON\cdot A_2B_2}$, de unde	1p
$\frac{B_1P}{OM\cdot A_1B_1}-\frac{B_2P}{OM\cdot A_2B_2}=\frac{A_2P}{ON\cdot A_2B_2}-\frac{A_1P}{ON\cdot A_1B_1}$ sau $\frac{1}{OM}\left(\frac{B_1P}{A_1B_1}-\frac{B_2P}{A_2B_2}\right)=\frac{1}{ON}\left(\frac{A_2P}{A_2B_2}-\frac{A_1P}{A_1B_1}\right)$(1).	1p
Demonstrăm că $\frac{B_1P}{A_1B_1}-\frac{B_2P}{A_2B_2}=\frac{A_2P}{A_2B_2}-\frac{A_1P}{A_1B_1}\Leftrightarrow\frac{A_1P+B_1P}{A_1B_1}=\frac{A_2P+B_2P}{A_2B_2}\Leftrightarrow\frac{A_1B_1}{A_1B_1}=\frac{A_2B_2}{A_2B_2}$ (A)	1p
Dar $\frac{B_1P}{A_1B_1}-\frac{B_2P}{A_2B_2}\neq 0$, pentru că în caz contrar s-ar obţine $\frac{B_1P}{A_1B_1}=\frac{B_2P}{A_2B_2}$ şi din reciproca teoremei lui Thales ar rezulta că A_1A_2 || B_1B_2 (F). Deducem din (1) că OM=ON. Atunci OMPN este romb şi [OP este bisectoarea ∢XOY.	1p

<u>SUBIECTUL 4</u> Fie trapezul ABCD, AB || CD, $AC\cap BD=\{O\}$ şi M$\in$(OA, astfel încât OM = OD şi M$\neq$A. Dacă CN || BM, N$\in$BD, demonstraţi că AMDN este trapez isoscel.



DC || AB $\Rightarrow\frac{OC}{OA}=\frac{OD}{OB}$	2p
BM || CN $\Rightarrow\frac{OM}{OC}=\frac{OB}{ON}$	1p
Din cele două relaţii rezultă $\frac{OM}{OA}=\frac{OD}{ON}$, de unde DM || AN.	2p
Cum ΔODM este isoscel de vârf O, rezultă AMDN este trapez isoscel.	2p