Olimpiada Nationala de Matematica
etapa locala- 16 februarie 2013
Clasa a IX-a

Subiecte — Varianta 3

1. a) Să se rezolve ecuația $[x]\cdot\{x\} = x$

**

*

b) Fie $n > 3$ un număr natural. Se consideră n mulțimi, fiecare având câte două elemente, astfel încât intersecția oricăror două din ele este o mulțime cu un singur element. Să se arate că intersecția tuturor celor n mulțimi este nevidă.

Severius Moldoveanu, București

2. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Arătați că:

$$\frac{a}{a+3} + \frac{b}{b+3} + \frac{c}{c+3} \le \frac{3}{4}$$

Marin Chiroiu, Pitești

3. Fie M un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC, diferit de vârfurile triunghiului și H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor MBC, MAC *și respectiv* MAB.
   a) Arătați că triunghiurile ABC și $H_1H_2H_3$ sunt congruente și au laturile respectiv paralele.
   b) Arătați că M este centrul de greutate al triunghiului $H_1H_2H_3$ dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Nicolae Papacu, Slobozia și Sorin Ulmeanu, Pitești

4. Fie $(a_n)_{n\ge 1}$ un șir de numere reale astfel încât $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{2^n}$ pentru orice $n \ge 1$. Arătați că $a_n < 3$ pentru orice număr natural $n \ge 1$

***

NOTA : Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.

Olimpiada Naţionala de Matematică

Etapa locală, 16 februarie 2013

Județul Argeș

Barem clasa a IX-a

1. a) 1) Cazul $\left[x\right]=1$...$1p$

2p

2) Obținerea afirmației $\left[x\right]\leq 0$...................................$1p$

3) Obținerea – scrierea $x=k+\frac{k}{k-1}=\frac{k^2}{k-1}, cu \quad k\in\mathbb{Z}-\mathbb{N}^*$ $1p$ *sau* $2p$

(Se acordă 1p dacă s-a luat doar cu "$\Rightarrow$" și 2p dacă s-a luat cu "$\Leftrightarrow$")

4) Verificare (dacă nu s-a lucrat cu echivalențe) 1p

b) Considerarea a 2 mulțime $A=\{a,b\}$ *si* $B=\{a,c\}$ și afirmația că o a treia este de forma $C=\{a,d\}$ *sau* $C=\{b,c\}$ 1p

Excluderea cazului $C=\{b,c\}$ 1p

Finalizare: Orice mulțime din restul de n-3 trebuie să-l conțină pe a.......1p

2. Aplicarea C-B-S pentru $(a+b+c)\leq\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}=3$................$2p$

Scrierea (obținerea) inegalității echivalente

$$\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3}\geq\frac{9}{4} \quad (2p)$$

(sau obținerea membrului stâng)

Aplicarea ineg. mediilor, C-B-S sau Bergström și finalizare 2p

Cazul de egalitate 1p

3. a) Obținerea relației vectoriale

$\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{BA}$ sau $\overrightarrow{H_2H_3}=\overrightarrow{CB}$ sau $\overrightarrow{H_3H_1}=\overrightarrow{AC}$ 1p

Demonstrarea tuturor 2p

Demonstrarea congruenței 1p

Demonstrarea paralelismului.........................1p

b) Obținerea condiției $\overrightarrow{OH_1}+\overrightarrow{OH_2}+\overrightarrow{OH_3}=\overrightarrow{O}$......................2p

Finalizare..1p

4. Calculul termenilor $a_3, a_4,$ eventual a_5 2p

Observația $a_1 < 3, a_2 < 3, a_3 < 3, a_4 < 3$ 1p

Inducția pentru: $a_n \le 3 - \frac{12}{2^n}, \quad n \ge 3$ 4p

$(a_n \le 3 - \frac{3}{2^{n-2}})$