

**MATEMATIKA OLIMPIÁSZ
KÖRZETI SZAKASZ**

2014. február 23.

XII. OSZTÁLY

M 1 – es program

- 1.) Határozd meg az egész számok \mathbb{Z} halmazának véges zárt részhalmazait a „o” műveletre nézve, ha $xoy = xy - 2014x - 2014y + 2014^2 + 2014, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ esetén!
- 2.) Adott az $A_a = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ mátrix és a $H = \{A_a^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ halmaz.
- a.) Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ legkisebb pozitív értékét, amelyre a H halmaznak pontosan 12 eleme van!
- b.) Az előbb meghatározott a érték esetén határozd meg a (H, \cdot) kommutatív csoport azon elemeit, amelyek egyenlők saját inverzükkel!
- 3.) Számítsd ki :
- a.) $\int \arcsin(\sin x) dx, x \in (0, \pi).$
- b.) $\int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+2} dx, (x>0).$
- 4.) Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan függvény amelyre $f^3(x) + 3^{f(x)} = x, \forall x \in \mathbb{R}$ esetén. Igazold, hogy az f függvénynek van primitív függvénye!

Megjegyzés:

**Minden feladat kötelező.
Minden feladat 10 pontot ér.
Munkaidő 3 óra**

OLIMPADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

BAREM

CLASA A XII-A

Programa M1

1.	Din oficiu	1p
	Dacă H este o parte stabilă finită a lui Z , atunci există $a = \min H$ și $b = \max H$.	2p
	Presupunând că $b > 2015$, rezultă $b - 2014 > 1$ de unde prin înmulțire cu $b - 2014$ avem $(b - 2014)^2 > b - 2014$ echivalent cu $(b - 2014)^2 + 2014 > b$ adică $b > b$, contradicție cu $b = \max H$, deci $b \leq 2015$.	2p
	Presupunând că $a < 2013$ avem $a - 2014 < -1$, ridicând la pătrat obținem $(a - 2014)^2 > 1$ de unde ajungem la $(a - 2014)^2 + 2014 > 2015$, adică $a > b$, contradicție cu $b = \max H$, deci $a \geq 2013$.	2p
	Rezultă că H poate conține numai elementele 2013, 2014, 2015 și poate fi una din mulțimile $\{2013\}$, $\{2014\}$, $\{2015\}$, $\{2013, 2014\}$, $\{2013, 2015\}$, $\{2014, 2015\}$, $\{2013, 2014, 2015\}$.	1p
	Prin calcul direct se obțin submulțimile: $\{2014\}$, $\{2015\}$, $\{2013, 2015\}$, $\{2014, 2015\}$, $\{2013, 2014\}$, $\{2013, 2014, 2015\}$.	2p

2.	Din oficiu	1p
a.)	Cu metoda inducției matematice se poate demonstra egalitatea $A_a^n = A_{na}$.	3p
	Datorită periodicității funcțiilor sinus și cosinus rezultă că pentru $a = \frac{\pi}{6}$ avem $A_{\frac{\pi}{6}}^{12} = A_{2\pi} = A_0 = I_2$ și $A_{\frac{\pi}{6}}^{13} = A_{\frac{\pi}{6}}$.	3p
b.)	Deoarece $\left(A_{\frac{\pi}{6}}^n\right)^{-1} = A_{\frac{\pi}{6}}^{12-n}$ în grupul abelian (H, \cdot) sunt două elemente egale cu inversele lor, anume $A_{\frac{\pi}{6}}^{12} = A_{2\pi} = A_0 = I_2$ și $A_{\frac{\pi}{6}}^6 = A_{\frac{\pi}{6}}$.	3p

3.	Din oficiu	1p
a.)	Avem relația $\arcsin(\sin x) = x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$	1p
	Din această relație pentru $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ rezultă $\pi - x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și astfel $\arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$.	2p
	După integrare avem $\int \arcsin(\sin x) dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi x - \frac{x^2}{2} + k, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$.	1p

	Impunând continuitatea, obținem în final $\int \arcsin(\sin x) dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} + c, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$	1p
b.)	$x(x+1)(x+2)(x+3)+2=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+2=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1+1=(x^2+3x+1)^2+1$	2p
	Derivata lui x^2+3x+1 este $2x+3$	1p
	$\int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+2} dx = \int \frac{(x^2+3x+1)'}{(x^2+3x+1)^2+1} dx = \arctg(x^2+3x+1) + c$	1p

4.	Din oficiu	1p
	Relația $f^3(x) + 3^{f(x)} = x, \forall x \in R$ se transcrie în $g(f(x)) = x, \forall x \in R$, unde g este funcția continuă definită prin $g(x) = x^3 + 3^x, \forall x \in R$.	2p
	Cum $g'(x) = 3x^2 + 3^x \ln 3 > 0, \forall x \in R$, rezultă că g este strict crescătoare, deci injectivă.	2p
	Deoarece $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$ și din continuitatea lui g deducem că g este surjectivă.	3p
	Prin urmare g este bijectivă, deci și inversabilă, $f = g^{-1}$, de unde rezultă că f este continuă și prin urmare are primitivă.	2p