OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a XI-a
27.02.2015

Subiectul I.(20 puncte)

Dacă a,b,c sunt măsurile unghiurilor triunghiului ascuţitunghic ABC, atunci arătaţi că:

$$\begin{vmatrix} tga & tgc-1 & tgb+1 \\ tgc+tgb & tga-1 & 1 \\ tga\cdot tgb\cdot tgc & -1 & 1 \end{vmatrix} \le 0$$

prof. Camelia Magdaş, Colegiul Naţional Andrei Mureşanu Dej

Subiectul II.(20 puncte)

Fie $A\in M_n(R)$ cu proprietatea că $A^{2015}+A^{2016}+A^{2017}=O_n$ şi fie $B=A^2+A+I_n$. Arătaţi că matricea I_n-AB este inversabilă.

prof. Cristian Petru Pop,ISJ Cluj, - prelucrare Gazeta matematică

Subiectul III.(40 puncte)

a) Fie $(x_n)_{n\ge 1}$ un şir de numere reale definit prin formula $x_n=\dfrac{\frac{1}{2015}+\frac{1}{2016}+\ldots+\frac{1}{n+2014}}{\ln(n+2015)}$.

Calculati $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

prof. Raul Domşa, Liceul Teoretic „Petru Maior" Gherla

b) Se dau şirurile (a_n) şi (b_n), unde $a_n=\dfrac{1}{1\cdot 3}-\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}-\dfrac{1}{4\cdot 6}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}, n\ge 1$ şi $b_n=1\cdot 3-2\cdot 4+3\cdot 5-4\cdot 6+\ldots+(2n-1)(2n+1)$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(4a_n)^{b_n}$.

prof. Nicolae Alb, Liceul Teoretic „Octavian Goga"Huedin

Subiectul IV.(10 puncte)

Să se calculeze limita şirului $(x_n)_{n\ge 0}$ care verifică relaţia $x_{n+1}=\sqrt{x_n+45}-\sqrt{x_n+5}$, cu $x_0\ge -5$.

prof. Eugen Jecan, Colegiul Naţional Andrei Mureşanu Dej

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. ***SUCCES!***
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

Barem clasa a XI-a
(OLM 2015-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I. (20 puncte)

Se arată că dacă $a+b+c=\pi$ atunci $tga+tgb+tgc=tga\cdot tgb\cdot tgc$. **(5 p)**

Folosind proprietățile determinanților, avem

$$\begin{vmatrix} tga & tgc-1 & tgb+1 \\ tgc+tgb & tga-1 & 1 \\ tga\cdot tgb\cdot tgc & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{=\!=}{c_1+c_2+c_3}\ tga\cdot tgb\cdot tgc\begin{vmatrix} 1 & tgc-1 & tgb+1 \\ 1 & tga-1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{=\!=}{l_2-l_1, l_3-l_1}\ tga\cdot tgb\cdot tgc\begin{vmatrix} 1 & tgc-1 & tgb+1 \\ 0 & tga-tgc & -tgb \\ 0 & -tgc & -tgb \end{vmatrix} = tga\cdot tgb\cdot tgc\begin{vmatrix} tga-tgc & -tgb \\ -tgc & -tgb \end{vmatrix}$$ **(15 p)**

$$=-tg^2a\cdot tg^2b\cdot tgc\le 0$$

Subiectul II. (20 puncte)

$A^{2015}\cdot B=O_n \Rightarrow A^{2015}\cdot B^{2015}=\left(AB\right)^{2015}=O_n$ **(10 p)**

$\left(I_n-AB\right)\left(I_n+AB+\left(AB\right)^2+...+\left(AB\right)^{2014}\right)=I_n-\left(AB\right)^{2015}=I_n$. Deci I_n-AB este inversabilă. **(10 p)**

Subiectul III. (40 puncte)

a) Utilizăm criteriul Cesaro-Stolz, pt. $a_n=\frac{1}{2015}+\frac{1}{2016}+...+\frac{1}{n+2104}$ şi $b_n=\ln(n+2015)$, $b_n\to\infty$, crescător. (*)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+2015}}{\ln\left(\frac{n+2016}{n+2015}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n+2015}\right)^{n+2015}}=\frac{1}{\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+2015}\right)^{n+2015}\right]\right)}=\frac{1}{\ln e}=1 \qquad (**).$$

Din (*), (**) $\overset{C.C.-S.}{\Rightarrow}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1;$ **(20 p)**

b) $a_n=\frac{1}{4}\cdot\frac{2n^2+n+1}{2n^2+n}$ **(10 p)** $\quad b_n=2n^2+n$ **(5 p)** $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(4a_n\right)^{b_n}=e$ **(5 p)**

Subiectul IV. (10 puncte)

Din relaţia de recurenţă rezultă că $x_n>0$, pentru orice $n\ge 1$. **(2 p)**

Putem scrie: $\left|x_{n+1}-4\right|=\left|\left(\sqrt{x_n+45}-7\right)-\left(\sqrt{x_n+5}-3\right)\right|\le\left|\sqrt{x_n+45}-7\right|+\left|\sqrt{x_n+5}-3\right|=$

$$=\frac{\left|x_n-4\right|}{\sqrt{x_n+45}+7}+\frac{\left|x_n-4\right|}{\sqrt{x_n+5}+3}=\left|x_n-4\right|\left(\frac{1}{\sqrt{x_n+45}+7}+\frac{1}{\sqrt{x_n+5}+3}\right)\le\left|x_n-4\right|\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{21}\left|x_n-4\right|$$ **(5 p)**

Folosind inegalitatea obţinută, avem succesiv: $\left|x_{n+1}-4\right|\le\frac{10}{21}\left|x_n-4\right|\le\left(\frac{10}{21}\right)^2\left|x_{n-1}-4\right|\le\cdots\le\left(\frac{10}{21}\right)^{n+1}\left|x_0-4\right|$ **(2 p)**

Folosind criteriul majorării, din $\left|x_n-4\right|\le\left(\frac{10}{21}\right)^n\left|x_0-4\right|$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=4$. **(1 p)**