INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 21.02.2016

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

a) Arătaţi că egalitatea $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{y+2}=\frac{1}{10}$ este verificată pentru x=14 şi y=58.
Daţi alt exemplu de numere naturale pentru care egalitatea este verificată.

b) Dacă x şi y sunt numere raţionale pozitive şi $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{y+2}=\frac{1}{10}$, calculaţi valoarea expresiei $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+2}$.

SUBIECTUL 2

Se consideră ecuaţia: $9^x+27^y=z(z+1)$ unde x, y, z sunt numere naturale.

a) Găsiţi trei soluţii ale ecuaţiei date.
b) Arătaţi că ecuaţia dată are o infinitate de soluţii.

S.G.M.

SUBIECTUL 3

Fie M mijlocul laturii [BC] a paralelogramului ABCD. Demonstraţi că dacă $\sphericalangle MDC \equiv \sphericalangle MAB$, atunci ABCD este dreptunghi.

R.M.T.

SUBIECTUL 4

Fie triunghiul ABC cu AB = 27 cm, BC = 30 cm, AC = 33 cm şi [AD bisectoarea unghiului A, $D \in (BC)$.

a) Aflaţi BD şi DC.
b) Dacă $M \in (AD)$, astfel încât $\frac{AM}{MD}=\frac{5}{6}$ şi $BM \cap AC = \{N\}$, aflaţi AN.

Prof. Damian Marinescu

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

a) Arătaţi că egalitatea $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{y+2}=\dfrac{1}{10}$ este verificată pentru x=14 şi y=58. Daţi alt exemplu de numere naturale pentru care egalitatea este verificată.

b) Dacă x şi y sunt numere raţionale pozitive şi $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{y+2}=\dfrac{1}{10}$, calculaţi valoarea expresiei $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{y}{y+2}$.

a) Verificare	**1p**
Un exemplu	**2p**
Exemple: (10, 218), (11, 118), (13, 68), (14, 58), (17, 43), (19, 38), (29, 28), (34, 26), (49, 23), (59, 22), (109, 20), (209;19).	
b) $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+2}=\frac{x+1-1}{x+1}+\frac{y+2-2}{y+2}$	**2p**
$=2-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{y+2}\right)$	**1p**
$=2-\frac{1}{10}=\frac{19}{10}$.	**1p**

OBS: Dacă alege să adune în ambii membri ai egalităţii $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{y+2}=\frac{1}{10}$ pe $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+2}$ **(2p).**

Apoi dacă scrie $2=\frac{1}{10}+\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+2}$ **(1p)** şi $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+2}=\frac{19}{10}$ **(1p).**

SUBIECTUL 2

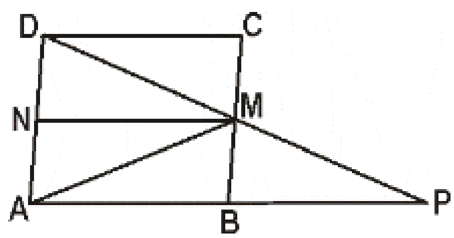
Se consideră ecuaţia: $9^x + 27^y = z(z + 1)$ unde x, y, z sunt numere naturale.

a) **Găsiţi trei soluţii ale ecuaţiei date.**

b) **Arătaţi că ecuaţia dată are o infinitate de soluţii.**

a) Fiecare exemplu **1p**. Exemple de soluţii: (0, 0, 1), (3, 1, 3^3), (6, 2, 3^6).	**3p**
b) Ecuaţia dată se mai scrie: $3^{2x} + 3^{3y} = z(z + 1)$.	**2p**
Pentru a scrie membrul stâng ca produs de două numere naturale consecutive luăm 2x=2·3y sau 3y=2·2x.	**1p**
Din prima relaţie obţinem tripletele (3n, n, 3^{3n}), n$\in\mathbb{N}$, iar din a doua (3m, 4m, 3^{6m}), m$\in\mathbb{N}$.(Suficient o formă).	**1p**

SUBIECTUL 3 Fie M mijlocul laturii [BC] a paralelogramului ABCD. Demonstraţi că dacă ∢MDC≡∢MAB, atunci ABCD este dreptunghi.

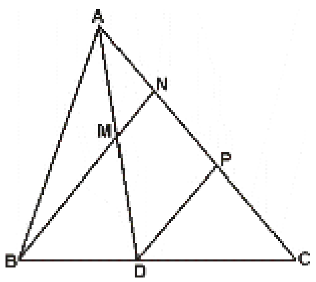


BAREM 1: Dacă N este mijlocul laturii [AD] $\Rightarrow$ ∢AMN≡∢MAB şi ∢DMN≡ ∢MDC.	**3p**
MN este mediană şi bisectoare, rezultă MN $\perp$ AD.	**3p**
Cum MN ‖ AB, se obţine m(Â) = 90^0 şi atunci ABCD este dreptunghi.	**1p**
BAREM 2: Dacă {P}=DM $\cap$ AB, atunci ΔMAP este isoscel din ∢MAP≡∢MDC≡∢MPA.	**3p**
MB este mediană în ΔMAP isoscel de bază AP, rezultă MB $\perp$ AB.	**3p**
ABCD fiind paralelogram cu m(∢B) = 90^0 este dreptunghi.	**1p**

<u>SUBIECTUL 4</u> **Fie triunghiul ABC cu AB = 27 cm, BC = 30 cm, AC = 33 cm şi (AD bisectoarea unghiului A, $D\in(BC)$.**

a) Aflaţi BD şi DC.

b) Dacă $M\in(AD)$, astfel încât $\frac{AM}{MD}=\frac{5}{6}$ şi $BM\cap AC=\{N\}$, aflaţi AN.

<table>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>a) Din teorema bisectoarei $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{27}{33}=\frac{9}{11}$.</td><td>2p</td></tr>
<tr><td>$\frac{BD}{BC}=\frac{9}{20}\Rightarrow$BD=13,5 şi DC=16,5.</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>b) În ΔADC se aplică teorema lui Menelaus pentru transversala B-M-N
$\frac{BD}{BC}\cdot\frac{NC}{AN}\cdot\frac{AM}{MD}=1$</td><td>2p</td></tr>
<tr><td>$\Rightarrow\frac{9}{20}\cdot\frac{NC}{AN}\cdot\frac{5}{6}=1\Rightarrow\frac{AN}{NC}=\frac{3}{8}\Rightarrow\frac{AN}{AC}=\frac{3}{11}$. Cum AC=33 $\Rightarrow$ AN=9.</td><td>2p</td></tr>
</table>

VARIANTĂ DE NOTARE PENTRU b)

Construieşte DP ‖ BN şi scrie teorema lui Thales în ΔADP şi în ΔBCN $\frac{AN}{NP}=\frac{AM}{MD}=\frac{5}{6}$ şi $\frac{PC}{NP}=\frac{DC}{BD}=\frac{11}{9}$.	**2p**
Se obţine ecuaţia $AN+\frac{6}{5}AN+\frac{22}{15}AN=33\Rightarrow$ AN=9.	**2p**