1. a) A conține numerele $45^2, 46^2, \ldots, 54^2$, deci 10 pătrate perfecte………………3 p
b) Elementele lui A se pot scrie:
$11 \cdot 181 + 9,\ 11 \cdot 181 + 10,\ \underbrace{11 \cdot 182}_{2002}, \ldots, 11 \cdot 183, \ldots,\ \underbrace{11 \cdot 272}_{2992},\ 11 \cdot 272 + 1, \ldots,$
$11 \cdot 272 + 8$ deci suma resturilor va fi $9 + 10 + (272 - 182)(1 + 2 + \ldots + 10) + 1 + 2 + \ldots + 8 = 19 + 90 \cdot 55 + 36 = 5005$ ……………………………………………4 p

2. $n = 2^{10} \cdot 5^{10}(2 + 5) - 2013 = 10^{10} \cdot 7 - 2013$ ……………………………………… 3 p

$n = 7\underbrace{00\ldots\ldots0}_{10} - 2013 = 6\underbrace{999\ldots9}_{6}7987$ ………………………………………2p
deci suma cifrelor este $7 \cdot 9 + 2 \cdot 7 + 8 + 6 = 91$ ……………………………… 2 p

3. a) $x = (1 + 3^1 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + \ldots + (3^{16} + 3^{17} + 3^{18} + 3^{19})$. Sumele din paranteze au ultima cifră 0, deci x are ultima cifră 0 ………………………..…...1 p
Ultima cifră a lui y este ultima cifră a numărului $6 \cdot 11 + 1$, deci 7 ……………….1 p
Ultima cifră a lui x + y este 7 ……………………………………………………..1 p
b) $2x = 3x - x = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{20} - 1 - 3 - 3^2 - \ldots - 3^{19} = 3^{20} - 1$, analog
$5y = 6y - y = 6^{12} - 1$ ………………………………………………………………… 2 p
$2x = (3^5)^4 - 1$,
$5y = (6^3)^4 - 1$ și deoarece $3^5 = 243 > 216 = 6^3$ rezultă $2x > 5y$ ……… 2 p

4. Presupunem că ar exista $\overline{abcd}$ un număr de patru cifre distincte, in baza 10, cu proprietatea $\overline{abcd} = \overline{ab} + \overline{ba} + \overline{ac} + \overline{ca} + \overline{ad} + \overline{da} + \overline{aa} + \overline{bc} + \overline{cb} + \overline{bd} + \overline{db} + \overline{bb} + \overline{cd} + \overline{dc} + \overline{cc} + \overline{dd} \Rightarrow \Rightarrow \overline{abcd} = 44 \cdot (a + b + c + d)$. Valoarea maximă a sumei a patru cifre distincte este $6 + 7 + 8 + 9 = 30$ si, cum $44 \cdot 30 = 1320$, deducem că $\overline{abcd} \le 1320 \Rightarrow a = 1, b \le 3$. Așadar valoarea maximă a sumei $a + b + c + d$,cu respectarea inegalității, ar fi $1 + 2 + 8 + 9 = 20$, si cum $44 \cdot 20 = 880 \ne \overline{abcd}$, rezultă presupunere falsă……………………………………………………………………
7p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2013
Clasa a V-a

Subiecte:

1. Se dă mulțimea A={2000, 2001, 2002, …………, 3000}
   a) Câte pătrate perfecte conține mulțimea A?
   b) Dacă toate elementele lui A se împart la 11, să se calculeze suma resturilor obținute.

2. Fie $n = 2^{11} \cdot 5^{10} + 2^{10} \cdot 5^{11} - 2013$. Să se calculeze suma cifrelor numărului n, scris în baza 10.

3. Se dau numerele:

   $x = 1 + 3^1 + 3^2 + \ldots\ldots + 3^{19}$
   $y = 1 + 6^1 + 6^2 + \ldots\ldots + 6^{11}$
   a) Să se determine ultima cifră a numărului $x + y$
   b) Să se compare numerele $2x$ și $5y$

4. Să se arate că nu există un număr de patru cifre distincte, în baza 10, care să se poată scrie ca suma tuturor numerelor de două cifre, în baza 10, care se pot forma cu cifrele sale.

Mihai Bodan, Cosmești, Teleorman

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.