OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a V-a

SUBIECTUL 1

Fie numerele naturale *a, b și c* unde ,

$a=\left(2\cdot 7^{x+2}+5\cdot 7^{x+1}-21\cdot 7^{x}\right):7^{x}$,

$b=\left[3^{1+2+3+.....+30}+2\cdot\left(3^{15}\right)^{31}+6\cdot\left(3^{93}\right)^{5}\right]:3^{467}$,

iar *c* reprezintă ultima cifră a numărului 2^{2015}.

Să se arate că numărul natural $A=a+b^{2015}+c$ este pătrat perfect.

SUBIECTUL 2

Se dă numărul $N=\overline{abcd}$ în baza zece, cu proprietatea că $5\cdot\overline{ab}=\overline{cd}$. Demonstrați că *N* se divide cu 7.

SUBIECTUL 3

Fie mulțimile $A=\{5x+3;36\}$ și $B=\{x^{2};7y+5\}$, unde $x,y\in N$.

a) Determinați $x,y\in N$ pentru care mulțimile sunt egale;

b) Stabiliți dacă $A\cup B$ poate avea trei elemente.

SUBIECTUL 4

Un număr natural de patru cifre are primele două cifre identice, iar cifra unităţilor 5. Acest număr se împarte la un număr de două cifre şi se obţine restul 98. Calculaţi deîmpărţitul, împărţitorul şi câtul.

Notă:
Timp de lucru: 2 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – Constanța, 15.02.2015
Clasa a V-a

Barem de corectare și notare

Subiectul 1.

$a=\left(2\cdot7^x\cdot7^2+3\cdot7^x\cdot7-7^x\right):7^x=7^x(98+35-21):7^x=112$ ……………..........…………**2p**

$b=\left(3^{\frac{30\cdot31}{2}}+2\cdot3^{15\cdot31}+6\cdot3^{93\cdot5}\right):3^{467}=\left(3^{465}+2\cdot3^{465}+6\cdot3^{465}\right):3^{467}$ ………………………**2p**

$=3^{465}(1+2+6):3^{467}=1$

$c=u\left(2^{2015}\right)=u\left(2^{4\cdot503+3}\right)=u\left(2^3\right)=8$ ……………………………………………………**2p**

deci $A=112+1^{2015}+8=121=11^2$, deci A este pătrat perfect………………………………**1p**

Subiectul 2.

$\mathrm{N}=\overline{abcd}=100\overline{ab}+\overline{cd}$..2p

$=100\overline{ab}+5\overline{ab}=105\overline{ab}$..2p

$=7\cdot15\cdot\overline{ab}\Rightarrow$
N se divide cu 7…………………………………..**3p**

Subiectul 3.

a) $u(5x+3)\in\{3;8\}$ acesta nu poate fi pătrat perfect , rezultă că x^2=36,deci x=6……**2p**

$A=\{33,36\}$ și atunci $7y+5=33$, de unde $y=4$…………………………………...…..**2p**

b) Pentru ca $A\cup B$ să poată avea trei elemente trebuie ca $A\cap B$ să aibă un element, și conform a) , rezultă că $x=6$ …………………………………………………………….…**1p**
se impune condiția $7y+5\neq33$ …………………………………………………………**1p**
deci, pentru orice y număr natural diferit de 4 , reuniunea are 3 elemente……………..**1p**

Subiectul 4.

$\overline{aab5}=x\cdot q+98,\ 0\leq98<x$ ….………………………………………………………........…**1p**

cum x are două cifre, rezultă că $x=99$, deci $\overline{aab5}=99\cdot q+98$…………………..…......... **2p**
rezultă că ultima cifră a lui $99\cdot q+98$ este 5, deci ultima cifră a lui q este 3,

dar $1105\leq\overline{aab5}\leq9995\Leftrightarrow1105\leq99\cdot q+98\leq9995$, de unde se obţine că $11\leq q\leq99$ şi, cum ultima cifră a lui q este 3, urmează că $q\in\{13, 23, 33, \ldots, 93\}$………………………**2p**
deci, deîmpărţitul este egal cu 3365, împărţitorul este egal cu 99 şi câtul este egal cu 33.....**2p**

Notă : **Orice altă soluţie corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.**