Barem de notare – clasa a XII-a

Problema 1. Să se arate că există o singură funcţie derivabilă

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $f'(x^3+2x+1)=4x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ şi $f(1)=0$.

Dacă F este o primitivă a lui f, să se calculeze $F(1)-F(-2)$.

Soluţie:

Din relaţia $f'(x^3+2x+1)=4x, \forall x\in\mathbb{R}$ obţinem $\left(3x^2+2\right)f'(x^3+2x+1)=12x^3+8x$

$f(x^3+2x+1)=3x^4+4x^2+C, \forall x\in\mathbb{R}$ **(1,5 p)**

şi cum $f(1)=0$ rezultă C=0 **(0,5 p)**

Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^3+2x+1$

$g'(x)=3x^2+2$, $g'(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci g este strict crescătoare şi astfel g este injectivă

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$, g continuă , deci g este surjectivă **(1,5 p)**

Funcţia f este bine determinată, deoarece $g(x)=x^3+2x+1$ este bijectivă pe $\mathbb{R}$.

Observăm că $\left(3x^2+2\right)f(x^3+2x+1)=(3x^2+2)(3x^4+4x^2)$

$$\left(3x^2+2\right)f(x^3+2x+1)=9\mathrm{x}^6+18\mathrm{x}^4+8x^2 \qquad \textbf{(1 p)}$$

$$F(x^3+2x+1)=\frac{9\mathrm{x}^7}{7}+\frac{18\mathrm{x}^5}{5}+\frac{8x^3}{3}+C_1 \qquad \textbf{(1,5 p)}$$

Pentru $x=0$ avem $F(1)=C_1$ şi pentru $x=-1$ avem $F(-2)=-\frac{9}{7}-\frac{18}{5}-\frac{8}{3}+C_1$ **(0,5 p)**

$F(-2)-F(1)=-\frac{9}{7}-\frac{18}{5}-\frac{8}{3}=-\frac{793}{105}$ **(0,5 p)**

Problema 2. Se consideră mulţimea $G = (2;\ \infty)$ şi funcţia $f : G \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x-2)$. Să se determine o lege de compoziţie $*$ pe G, astfel încât $(G,*)$ să fie grup, iar funcția f să fie izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul aditiv $(\mathbb{R},+)$.

Soluţie:

Deoarece funcția f este izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul aditiv $(\mathbb{R},+)$, obținem

că f este bijectivă, deci inversabilă **(1 p)**

și relația $f(x*y) = f(x) + f(y)$, pentru orice $x, y \in G$. **(1 p)**

$f^{-1}(f(x*y)) = f^{-1}(f(x) + f(y))$, pentru orice $x, y \in G$

$x*y = f^{-1}(f(x) + f(y))$ **(1 p)**

Se arată că $f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to G$, $f^{-1}(x) = e^x + 2$ **(1 p)**

și relația de mai sus devine

$x*y = e^{f(x)+f(y)} + 2 = e^{\ln(x-2)+\ln(y-2)} + 2 = e^{\ln(x-2)(y-2)} + 2$ **(1 p)**

$= (x-2)(y-2) + 2$

$x*y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x, y \in (2;\infty)$ **(1 p)**

Se arată că $*$ este lege de compoziţie pe G şi că $(G,*)$ este grup. **(1 p)**

Problema 3. Fie A un inel cu element unitate astfel încât $x^3 = x^2, \forall x \in A$. Să se arate că

a) $x^2 = x, \forall x \in A$
b) A este un inel comutativ.

Soluţie:**.**

a) $x \to -x \quad -x^3 = x^2$, pentru $\forall x \in A$ **(1 p)**

$x \to x+1 \quad (x+1)^3 = (x+1)^2 \quad x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^2 + 2x + 1$ **(1 p)**

$x^2 + x = 0 \qquad x^2 = -x$ **(1 p)**

$x^3 = x$, dar ştim că $x^3 = x^2$, ceea ce înseamnă că $x = -x$ **(1 p)**

Se deduce imediat că $x^2 = x$ **(0,5 p)**

b) $x \to x + y \quad (x+y)^2 = x + y$ **(1 p)**

$x^2 + xy + yx + y^2 = x + y$

$xy + yx = 0$ **(1 p)**

$xy = -yx = yx$, pentru orice $x, y \in A$ **(0,5 p)**

Problema 4. Să se calculeze $\lim\limits_{y\searrow 0}\int_y^1\left(\text{arctg } x\cdot\text{arctg }\frac{1}{x}+\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\right)dx$.

Gazeta matematică

Soluţie:

$\text{arctg } x+\text{arctg }\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$, pentru orice $x>0$ **(1 p)**

$$\int\left(\text{arctg } x\cdot\text{arctg }\frac{1}{x}+\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\right)dx=\int\left(\text{arctg } x\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\text{arctg } x\right)+\left(\text{arctg } x\right)'\ln\left(1+x^2\right)\right)dx \quad \textbf{(1 p)}$$

$$=\int\frac{\pi}{2}\cdot\text{arctg } x\,dx-\int\text{arctg}^2 x\,dx+\text{arctg } x\cdot\ln\left(1+x^2\right)-\int\frac{2x}{1+x^2}\cdot\text{arctg } x dx \quad \textbf{(1 p)}$$

$$=\frac{\pi}{2}\int x'\cdot\text{arctg } x\,dx-\int\text{arctg}^2 x\,dx+\text{arctg } x\cdot\ln\left(1+x^2\right)-\int x\cdot\left(\text{arctg}^2 x\right)'dx \quad \textbf{(2 p)}$$

$$=\frac{\pi}{2}x\cdot\text{arctg } x-\frac{\pi}{2}\int\frac{x}{1+x^2}\,dx-\int\text{arctg}^2 x\,dx+\text{arctg } x\cdot\ln\left(1+x^2\right)-x\cdot\left(\text{arctg}^2 x\right)+\int\text{arctg}^2\,x dx$$

$$=\frac{\pi}{2}x\cdot\text{arctg } x-\frac{\pi}{4}\ln\left(1+x^2\right)+\text{arctg } x\cdot\ln\left(1+x^2\right)-x\cdot\left(\text{arctg}^2 x\right)+C \quad \textbf{(1 p)}$$

$$\lim_{y\searrow 0}\int_y^1\left(\text{arctg } x\cdot\text{arctg }\frac{1}{x}+\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\lim_{y\searrow 0}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{\pi}{4}\cdot\ln 2-\frac{\pi^2}{16}-\left(\frac{\pi}{2}y\cdot\text{arctg } y-\frac{\pi}{4}\ln\left(1+y^2\right)+\text{arctg } y\cdot\ln\left(1+y^2\right)-y\cdot\left(\text{arctg}^2 y\right)\right)\right)$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi^2}{16} \quad \textbf{(1 p)}$$