Inspectoratul Scolar Judetean Gorj

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A VII-A

15 februarie 2015

1. Fie numerele reale $a_1, a_2, a_3, ..., a_{50}$ invers proporţionale cu numerele $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{50}$ astfel încât $\sqrt{\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + ... + \frac{1}{a_{49} a_{50}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Determinaţi mulţimea valorilor pe care le poate lua expresia $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{50}$.

2. Se consideră triunghiul echilateral ΔABC, $BM \perp AC$, $M \in (AC)$, N simetricul punctului M faţă de punctul C şi punctul P astfel încât $m(\sphericalangle PBM) = 90^\circ$ şi $PN \parallel BM$. Fie $BC \cap MP = \{O\}$.

a) Să se arate că patrulaterul *BMNP* este dreptunghi. Patrulaterul *BMNP* este pătrat? Justificare.

b) Stabiliţi natura patrulaterului *STCM*, unde *S* este mijlocul segmentului (BO) şi *T* este mijlocul segmentului (PO).

c) Determinați raportul dintre aria suprafeţei triunghiulare ΔMOC şi aria suprafeţei triunghiulare ΔABC.

3. a) Arătați că oricare ar fi numerele reale *a,b,c* avem

$$|a+b| + |a+c| \geq |b-c| \ .$$

b) Demonstrați că pentru orice număr real *x* avem

$$|x+1| + |x+2| + |x+3| + ... + |x+2014| \geq 1007^2 \ .$$

GM

4. Se consideră un paralelogram cu un unghi de 120° şi având două laturi consecutive de lungimi *a* şi 2*a*. Dacă aria suprafeţei triunghiulare determinate de bisectoarele a două unghiuri alăturate şi una din laturile paralelogramului este de $5cm^2$, aflaţi aria paralelogramului. Discuţie.

NOTĂ. Timp de lucru 3 ore .Fiecare subiect se notează cu 7 puncte.

BAREM

CLASA A VII-A

15 februarie 2015

1. $a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{a_3}{3} = ... = \frac{a_{50}}{50} = k \Rightarrow a_1 = k, a_2 = 2k, a_3 = 3k, ..., a_{50} = 50k$ 1p

$\sqrt{\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + ... + \frac{1}{a_{49}a_{50}}} = \frac{1}{|k|} \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}}$ 2p

$|k| = \frac{7}{5} \Rightarrow k \in \left\{-\frac{7}{5}, \frac{7}{5}\right\}$ 1p

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{50} = k \cdot 25 \cdot 51$ 1p

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{50} \in \{-1785, 1785\}$ 2p

2. a) De exemplu are toate unghiurile drepte, deci *BMNP* este dreptunghi. 2p

$[BM]$ înăltime în $\Delta ABC \Rightarrow BM < AC \Rightarrow BM < MN \Rightarrow BMNP$ nu este pătrat 1p

b) Din *BMNP* dreptunghi obţinem $BP=MN$

$[ST]$ linie mijlocie în $\Delta BOP \Rightarrow ST \parallel BP$ si $ST = \frac{BP}{2} = \frac{MN}{2} = MC$ 1p

$\left.\begin{array}{r} ST = MC \\ ST \parallel MC \end{array}\right\} \Rightarrow STCM$ paralelogram 1p

c)

$STCM$ paralelogram $\Rightarrow$ SO=OC 1p

$BS = SO = OC \Rightarrow A_{\Delta MOC} = \frac{1}{3} A_{\Delta BMC} = \frac{1}{6} A_{\Delta ABC}$

$\frac{A_{\Delta MOC}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{1}{6}$ 1p

3a)

$$|b-c|=|b+a-a-c|=|(b+a)+(-a-c)|\le|b+a|+|-(a+c)|=|b+a|+|a+c|$$ 3p

b) Aplicând punctul a) avem

$|x+2014|+|x+1|\ge 2013$

$|x+2013|+|x+2|\ge 2011$

....

$|x+1009|+|x+1006|\ge 3$

$|x+1008|+|x+1007|\ge 1$ 2p

Însumând avem

$$|x+1|+|x+2|+...+|x+2014|\ge 1+3+5+...+2013=1007^2.$$ 2p

4. Fie paralelogramul $ABCD$. Putem presupune că $AB=2a$, $AD=a$, $m\left(\widehat{ABC}\right)=120^\circ$, celălalt caz fiind analog. Bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABC}$ şi $\widehat{ADC}$ intersectează laturile $[CD]$ respectiv $[AB]$ în mijloacele acestora N respectiv M 2p

$AMND$ şi $BCNM$ sunt romburi...1p

Avem două cazuri:

I Aria suprafeţei triunghiulare determinată de o latură cu lungimea a şi bisectoarele a două unghiuri alăturate este de $5cm^2$ şi atunci aria paralelogramului este de $40cm^2$ 2p

II Aria suprafeţei triunghiulare determinată de o latură cu lungimea $2a$ şi bisectoarele a două unghiuri alăturate are este de $5cm^2$ şi atunci aria paralelogramului este de $10cm^2$ 2p