Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a X-a

I. a. Igazold, hogy $\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}\geq 6, \quad \forall a,b,c\in(0,\infty)$

b. Oldd meg a következő egyenlőtlenséget: $18^x+12^x+9^x+3^x+4^x+2^x\leq 6\cdot 6^x$

Prof. Galambosi Csaba, Satu Mare

II. a. Adott az $f:\Re\to\Re$ függvény, amely a következő tulajdonsággal rendelkezik:
$f(f(x))+2012\cdot f(x)=x^{2013}, \quad \forall x\in\Re$.

Igazold, hogy f injektiv.

b. Léteznek olyan $f:(0,\infty)\to\Re$ injektiv függvények, melyekre

$$f(x)+f(2^x)+f(\log_2 x)=2013, \qquad \forall x\in(0,\infty) \ ?$$

Prof. Tămîian Traian, Carei

III. Adottak az a,b,c,d különböző komplex számok úgy, hogy $a+b+c+d=0$ és $|a|=|b|=|c|=|d|$.

Igazold, hogy a). $(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d)=0$

b). Ha $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}=\{a,b,c,d\}$ és $\alpha+\beta=0$ mutasd meg, hogy a,b,c,d az $z^4+(\alpha\beta+\gamma\delta)\cdot z^2+\alpha\beta\gamma\delta=0$ egyenlet gyökei.

Prof. Pop Ovidiu, Satu Mare

IV. Adott az $ABCD$ körbeírható négyszög, melynek oldalainak hossza a,b,c,d és átlóinak hossza d_1 és d_2. Igazold, hogy $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{da}\geq 4\left(\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}\right)$.

Prof. Buth Gigel, Satu Mare
Matematician. Râmbu Gelu, Baia Mare

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a X-a

Barem de corectare

I. a. (3 puncte)

Aplicăm inegalitatea $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2,\ \forall x,y>0$.

b. (4 puncte)

Folosim inegalitatea de la punctul **a.** pentru $a=3^x$, $b=2^x, c=1$.

II. a. (3 puncte)

Luăm $f(x_1)=f(x_2)$ rezultă $f(f(x_1))=f(f(x_2))$, exploatând acest lucru rezultă $x_1=x_2$. Deci f este injectivă.

b. (4 puncte)

Presupunem că există o astfel de funcție, apoi dând lui x valorile *2* şi *4*, obținem contradicția cu injectivitatea. Deci nu există funcții cu proprietatea cerută.

III. a. (4 puncte)

Notăm $|a|=r$ şi avem $a\cdot\overline{a}=r^2$ şi analoagele. Ținând seama de ipoteză şi de acest lucru obținem $(a+c)(a+b)(b+c)=0$, am folosit că $d=-a-b-c$, $a+b=-(c+d)$, $a+c=-(b+d)$, $b+c=-(a+d)$ şi obține concluzia problemei.

b. (3 puncte)

Ecuația este echivalentă cu $(z^2+\alpha\beta)(z^2+\gamma\delta)=0$. Presupunem că $\alpha=a$, $\beta=b$, deci $a+b=0$, din $a+b+c+d=0$ rezultă $c+d=0$. Deci cele două ecuații vor avea soluțiile a şi b respectiv c şi d.

IV. (4 puncte)

Aplicăm teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile ΔABC şi ΔADC exprimând $\cos B$ şi $\cos D$, apoi însumândule cu notațiile adecvate obținem $\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}\geq\frac{4}{d_1^2}$. Am ținut cont că patrulaterul este inscriptibil şi că $\cos B=-\cos D$.

(3 puncte)

Analog obținem $\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}\geq\frac{4}{d_2^2}$, apoi însumând inegalitățile se obține concluzia problemei.

Egalitate se obține atunci când patrulaterul este **pătrat**.