Olimpiada naţională de matematică

etapa locală

28.02.2015

Clasa a XII-a

1. Să se arate că monoizii $(N^*, \cdot)$ şi $(Z^*, \cdot)$ nu sunt izomorfi.

Pop Ovidiu – Colegiul Naţional „Mihai Eminescu"

2. Fie f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcţie bijectivă cu f(1) = k, k ∈ $\mathbb{R}$. Pe $\mathbb{R}^2$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = f^{-1}[f(x) + f(y) - k], \forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că $(\mathbb{R}, *)$ este grup comutativ.

3. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} \cos x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\int det^2(A - B)dx$, unde x ∈ $\mathbb{R}$.

4. Să se determine funcţiile $f, g: R \rightarrow R$, f continuă pe R, g derivabilă pe R cu derivata continuă pe R, f(0) = g (0) = 2015, $f \in \int g'(x)dx$ şi $g \in \int f(x)dx$.

Pop Ovidiu – Colegiul Naţional „Mihai Eminescu"

Notă: Timp de lucru 3 ore.
Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.
SUCCES!

Barem de corectare

1.	Reducere la absurd: $(\exists) f: N^* \to Z^*$ bijectiv[, $f(x,y) = f(x)f(y)$	**1 p**
	$f(1) = 1$	**1 p**
	$f(p) = a$, p = număr prim, a = număr prim	**2 p**
	$p \in Z$ prim $\Rightarrow (\exists) p_1, p_2 \in N$, prim, astfel încât $f(p_1) = p, f(p_2) = -p$	**2 p**
	Contradicția $p_1 = p_2$ și $p_1 \neq p_2$	**1 p**
	TOTAL Subiectul 1	**7 p**
2.	asociativitatea	**2p**
	comutativitatea	**1p**
	element neutru e = 1	**2p**
	elemente simetrizabile	**2p**
	TOTAL Subiectul 2	**7 p**
3.	$det^2(A - B) = (1 - cos\ x)^2 sin^2 x$	**1p**
	$\int det^2(A - B)dx = \frac{1}{2}(x + sinxcosx) - \frac{2}{3}sin^3 x + \frac{1}{16}(2x - sin2xcos2x) + C$	**6p**
	TOTAL Subiectul 3	**7 p**
4.	$f'(x) = g'(x)$ și $g'(x) = f(x) \Rightarrow f'(x) = f(x), (\forall) x \in R$	**2p**
	$f(x) = ce^x$	**2p**
	c = 2015	**1p**
	$g(x) = 2015 \cdot e^x + a$	**1p**
	TOTAL Subiectul 4	**7 p**

Subiecte propuse de prof.dr. Doina Muntean – ISJ şi prof.dr. Ovidiu Pop – Colegiul Naţional „Mihai Eminescu" Satu Mare