S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a VI-a

I. TÉTEL

a) Mutassátok meg, hogy $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$ bármely x természetes szám esetén.

b) Számítsátok ki$\boldsymbol{x}$-et az alábbi egzenletből:
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+x}=\frac{4030}{2016}.$$

II. TÉTEL

Mutassátok ki, hogy

a) $a=7^n+7^{n+1}+7^{n+2}+7^{n+3}$osztható 100-zal, bármely $n\in N$ esetén.

b) $b=(n-4)\cdot 7^n+(n-3)\cdot 7^{n+1}+(n+2)\cdot 7^{n+2}+(n-1)\cdot 7^{n+3}$osztható 10-zel, bármely $n\in N, n\geq 4$ esetén.

Constantin Bozdog, Reghin

III. TÉTEL

Adottak az A, O, D kollineáris pontok, ahol $O\in(AD)$ illetve az $\sphericalangle AOB$ és $\sphericalangle BOC$ egymás melletti szögek, az (OC félegyenes pedig $\sphericalangle BOD$ szög belsejében van. Ha $m(\sphericalangle BOC)=5\cdot m(\sphericalangle AOB)$, $m(\sphericalangle BOC)=\dfrac{5}{3}m(\sphericalangle COD)$ és $[OM$ az $\sphericalangle AOC$ szögfelezője, illetve Q a $\sphericalangle BOD$ szög egy belső pontja, amelyre $m(\sphericalangle MOQ)=90^o$:

a) Számítsátok ki az $m(\sphericalangle AOB)$, $m(\sphericalangle BOC)$, $m(\sphericalangle COD)$ szögmértékeket.

b) Mutassátok ki, hogy [OQ szögfelezője a $\sphericalangle COD$ szögnek.

IV. TÉTEL

Legyenek az A, B, C, D kollineáris pontok a d egyenesen ebben a sorrendbenúgy, hogy $[AB]\equiv[CD]$. A d egyenes ugyanazon oldalán vegyük fel az E és F pontokat úgy, hogy $[BE]\equiv[CF]$, $\sphericalangle EBC\equiv\sphericalangle FCB$ és $[BF\subset \text{Int}\sphericalangle EBC$. Bizonyítsátok be, hogy:

a) $[AE]\equiv[DF]$;

b) $\sphericalangle AFC\equiv\sphericalangle DEB$.

Megjegyzés

Minden feladat kötelező.
Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.
Munkaidő 2 óra.

Probleme selectate de prof. Gînța Florica și prof. Seceleanu Daniela

S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a VI-a
Bareme de corectare

SUBIECTUL I

a) Arătați că $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ oricare ar fi x număr natural.

b) Aflați ***x*** din $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+x}=\frac{4030}{2016}$.

Soluție

a) Calcul direct..(1p)

b) $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+x}=\frac{4030}{2016}$ (1)

$\frac{1}{1}=\frac{1}{\frac{1\cdot 2}{2}}=\frac{2}{1\cdot 2}$; $\frac{1}{1+2}=\frac{1}{\frac{2\cdot 3}{2}}=\frac{2}{2\cdot 3}$; $\frac{1}{1+2+3}=\frac{1}{\frac{3\cdot 4}{2}}=\frac{2}{3\cdot 4}$ s.a.m.d

$\frac{1}{1+2+\ldots+x}=\frac{1}{\frac{x\cdot(x+1)}{2}}=\frac{2}{x\cdot(x+1)}$. **(3p)** Atunci relatia (1) devine

$$\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{2}{x\cdot(x+1)}=\frac{4030}{2016}\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{4030}{2016}$$

(2p) $\Leftrightarrow\frac{1}{1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2015}{2016}\Leftrightarrow\frac{x}{x+1}=\frac{2015}{2016}\Leftrightarrow x=2015$ **(1p)**

SUBIECTUL II

Arătați că

a) numarul a=$7^n+7^{n+1}+7^{n+2}+7^{n+3}$ este divizibil cu 100, oricare ar fi n$\in N$.

b) numarul b=$(n-4)\cdot 7^n+(n-3)\cdot 7^{n+1}+(n+2)\cdot 7^{n+2}+(n-1)\cdot 7^{n+3}$ este divizibil cu 10, oricare ar fi n$\in N, n\geq 4$.

Constantin Bozdog, Reghin

Rezolvare:

a) Ultimele doua cifre ale lui 7^n pentru n=4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3, k$\in N$ sunt 01,07,49, respectiv 43……………………………………………………………………………2p

Oricare ar fi n$\in N$, ultimele doua cifre ale lui a sunt 0, deci a⋮100……………………...1p

b)Pentru n=4, U(b)=U($7^5+6\cdot 7^6+3\cdot 7^7$)=U($7+6\cdot 9+3\cdot 3$) =U(7+4+9)=0……………...1p

Pentru n>4, b=n($7^n+7^{n+1}+7^{n+2}+7^{n+3}$)-4$\cdot 7^n-3\cdot 7^{n+1}$+2$\cdot 7^{n+2}$-$7^{n+3}$ si tinand seama de a), mai trebuie calculata ultima cifra a numarului c=2$\cdot 7^{n+2}$-4$\cdot 7^n$-3$\cdot 7^{n+1}$-7^{n+3}…………………………..1p

Pentru n=4k, U(c)=U($2\cdot 9-4\cdot 1-3\cdot 7-3)=0$

n=4k+1, U(c)=U($2\cdot 3-4\cdot 7-3\cdot 9-1)=0$

n=4k+2, U(c)=U($2\cdot 1-4\cdot 9-3\cdot 3-7)=0$

n=4k+3, U(c)=U($2\cdot 7-4\cdot 3-3\cdot 1-9)=0$,

deci b⋮10, oricare ar fi n$\in N$, n≥4……………………………………………………………2p

SUBIECTUL III

Fie punctele coliniare A, O, D unde O$\in$(AD) și unghiurile ∢AOB și ∢BOC adiacente, iar semidreapta (OC este interioară unghiului ∢BOD. Dacă m(∢BOC)=5·m(∢AOB), m(∢BOC)=$\frac{5}{3}$m(∢COD) și $[OM$ este bisectoarea ∢AOC iar Q punct interior unghiului ∢BOD astfel încât m(∢MOQ)=90º, se cere:

a) m(∢AOB), m(∢BOC), m(∢COD).
b) Să se arate că [OQ este bisectoarea unghiului m(∢COD).

Rezolvare:

a) Fie m(∢BOC)=a, deci m(∢AOB)=$\frac{a}{5}$, m(∢COD)=$\frac{3a}{5}$

Obținem relația $\frac{a}{5}+a+\frac{3a}{5}=180^\circ$. **1p**

a=100º **1p**

Finalizare m(∢AOB)=20º, M(∢BOC)=100º, m(∢COD)=60º **2p**

b) m(∢AOM)=m(∢AOC):2=60º **1p**

m(∢QOD)=180º-[m(∢AOM)+m(∢MOQ)]=
=180º-(60º+90º)=30º **1p**

m(∢QOD)=30º=60º:2=m(∢COD):2, deci (OQ bisectoarea unghiului ∢COD

SUBIECTUL IV

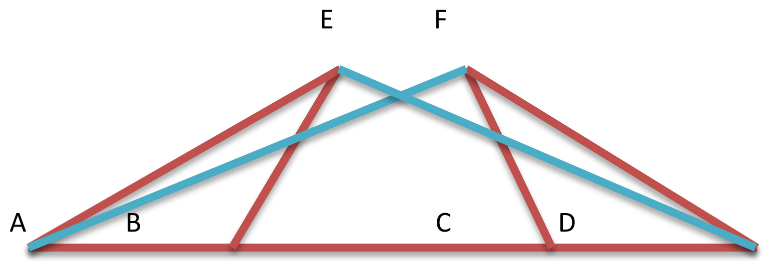
Fie punctele coliniare A, B, C, D (în această ordine) situate pe dreapta d, astfel încât [AB] ≡ [CD]. De aceeaşi parte a dreptei d se consideră punctele E şi F astfel încât [BE] ≡ [CF], ∠EBC ≡ ∠FCB şi [BF ⊂ Int∠EBC. Să se demonstreze că:

a) [AE] ≡ [DF] ;

b) ∠AFC ≡ ∠DEB.

***

Soluție



a) Arătăm că $\Delta EBA \equiv \Delta ECD$. Din ipoteză avem că, [AB] ≡ [CD] și [BE] ≡ [CF], iar din faptul că ∠EBC ≡ ∠FCB deducem că $\prec EBA \equiv \prec FCD$ (au același suplement). Deci, în baza cazului (L.U.L) avem că $\Delta EBA \equiv \Delta FCD$ de unde rezultă că [AE] ≡ [DF]. **(4p)**

b) Vom considera triunghiurile ΔFAC, respectiv ΔEDB în care știm că [BE] ≡ [CF], ∠EBC ≡ ∠FCB și [BD] ≡ [CA]. Atunci în baza cazului de congruență (L.U.L) avem că $\Delta FAC \equiv \Delta EDB$ de unde rezultă că ∠AFC ≡ ∠DEB. **(3p)**

Se punctează orice rezolvare corectă diferită de cea din barem