Ministerul Educației

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Huşi, 3 aprilie 2024

CLASA a VII-a – soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Pentru orice număr real x se notează $A(x) = x^2 + 4 \cdot [x]$.

a) Determinați numerele reale x pentru care $A(x) = \{x\}^2$.

b) Determinați numerele reale $y > 0$ pentru care $A(y)$ este pătratul unui număr natural.

($[z]$ și $\{z\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real z)

Soluţie. a) Din $([x] + \{x\})^2 + 4 \cdot [x] = \{x\}^2$ se obține $[x]^2 + 2 \cdot [x] \cdot \{x\} + 4 \cdot [x] = 0$ (*).

Dacă $x \geq 0$, se deduce că $[x] = 0$, așadar orice $x \in [0, 1)$ este soluție a problemei. **1p**

Dacă $x < 0$, egalitatea (*) conduce la $\{x\} = -\dfrac{[x]^2 + 4 \cdot [x]}{2 \cdot [x]} = -\dfrac{[x] + 4}{2}$. Deoarece $\{x\} \in [0, 1)$ ajungem la $[x] \in \{-5, -4\}$ și astfel se obțin soluțiile $x_1 = -\dfrac{9}{2}, x_2 = -4$, care verifică egalitatea din enunț.

Așadar $x \in \{-\dfrac{9}{2}, -4\} \cup [0, 1)$ **2p**

b) Pentru $y \in (0, 1)$ avem $A(y) = y^2 \in (0, 1), A(1) = 5$, iar pentru $y \in (1, 2)$ avem $A(y) = y^2 + 4 \in (5, 8)$, așadar $A(y)$ nu este pătrat perfect pentru $y \in (0, 2)$ **1p**

Pentru $y \geq 2$, condiția din enunț conduce la $y^2 \in \mathbb{N}$, așadar $y = \sqrt{m}$, cu $m \in \mathbb{N}, m \geq 4$, de unde se ajunge la $m + 4 \cdot [\sqrt{m}] = p^2$, cu $p \in \mathbb{N}$.

Notând $k = [\sqrt{m}]$, rezultă $k \geq 2$ și $k^2 \leq m < (k+1)^2$, adică $m + 4k = p^2$. **1p**

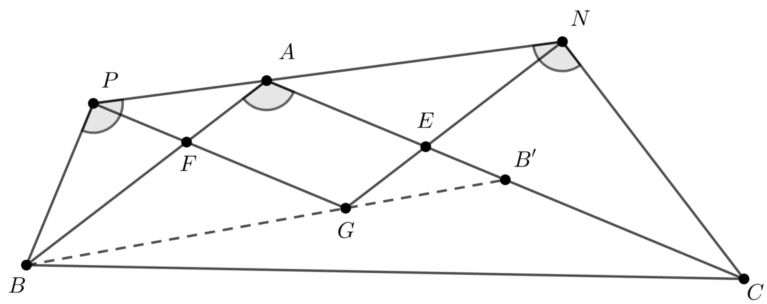
Folosind acum faptul că $k^2 + 4k \leq p^2 < (k + 1)^2 + 4k = k^2 + 6k + 1 < (k + 3)^2$, se deduce că (1) $p^2 = (k + 1)^2 = 1$, pentru $k = 0$ sau (2) $p^2 = 9$ pentru $k = 1$, valori care nu verifică egalitatea din enunț sau (3) $p^2 = (k+2)^2$, pentru $k \geq 2$. **1p**

Așadar $p = k + 2$ și $m = (k + 2)^2 - 4k = k^2 + 4$. Se obține astfel $y = \sqrt{k^2 + 4}, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, numere care verifică egalitatea din enunț..... **1p**

Problema 2. Se consideră un triunghi ABC cu $\sphericalangle BAC = 120^\circ$ și triunghiurile isoscele PAB și NAC astfel încât $\sphericalangle APB = \sphericalangle ANC = \sphericalangle BAC$, dreapta AB să separe punctele P și C și dreapta AC să separe punctele N și B.

Arătați că, dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci $GP = GN = \dfrac{AB + AC}{3}$.

Soluţie. Triunghiurile PAB și NAC fiind isoscele, cu $\sphericalangle APB = \sphericalangle ANC = \sphericalangle BAC = 120°$, rezultă că $\sphericalangle PAB = \sphericalangle NAC = 30°$, deci punctele P, A, N sunt coliniare. **1p**



Fie $PF||AC, F \in AB$ și $NE||AB, E \in AC$. Avem $\sphericalangle APF = \sphericalangle NAC = \sphericalangle FAP$, prin urmare triunghiul FAP este isoscel , cu $FA = FP$ (1)

Pe de altă parte, din $\sphericalangle APB = 120°$ și $\sphericalangle APF = 30°$, rezultă că $\sphericalangle FPB = 90°$, deci triunghiul PBF este de tipul $30° - 60° - 90°$, de unde $BF = 2 \cdot FP$ (2). Din (1) și (2) obținem $\dfrac{BF}{FA} = 2$ (3) **2p**

Dacă BB' este mediana din B a triunghiului ABC, cum G este centrul de greutate al triunghiului ABC, avem $\dfrac{BG}{GB'} = 2$ (4). Relațiile (3) și (4) conduc, conform reciprocei teoremei lui Thales, la $FG||AC$, deci punctele P, F și G sunt coliniare. Obținem $\sphericalangle GPN = 30°$ **2p**

Analog rezultă că $\sphericalangle GNP = 30°$ și astfel deducem că triunghiul GNP este isoscel, cu $GP = GN$. **1p**

Cum $AFGE$ este paralelogram, $GP = GF + FP = AE + FP = \dfrac{AB + AC}{3}$, de unde rezultă concluzia. **1p**

Problema 3. Pentru orice număr natural nenul n se consideră mulțimea $A = \{n^2, n^2 + 1, n^2 + 2, \ldots, (n + 1)^2\}$.

Determinați numerele $a, b, c \in A, a < b < c$, știind că b este media geometrică a numerelor a și c.

Soluţie. Din $b^2 = ac \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{x}{y}$, unde $x, y \in \mathbb{N}^*, (x, y) = 1$ și $x > y$.
Deci, $b = a \cdot \dfrac{x}{y}, c = a \cdot \left(\dfrac{x}{y}\right)^2$ **2p**

Cum $c = a \cdot \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 \in \mathbb{N}^*$ și $(x, y) = 1$, rezultă că $\dfrac{a}{y^2} \in \mathbb{N}^*$, deci $a = py^2$ unde $p \in \mathbb{N}^*$. Numerele sunt $a = py^2, b = pxy, c = px^2$, unde $x, y \in \mathbb{N}^*$, $x > y$, $p \in \mathbb{N}^*$. **2p**

Din $a \in A \Rightarrow \sqrt{p} \cdot y \geq n$ iar din $c \in A \Rightarrow \sqrt{p}x \leq n+1$, deci $\sqrt{p} \cdot (x-y) \leq 1$ și cum $x - y \geq 1$, rezultă $1 \geq \sqrt{p}(x - y) \geq \sqrt{p}$, cum $p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow p = 1$ ... **2p**

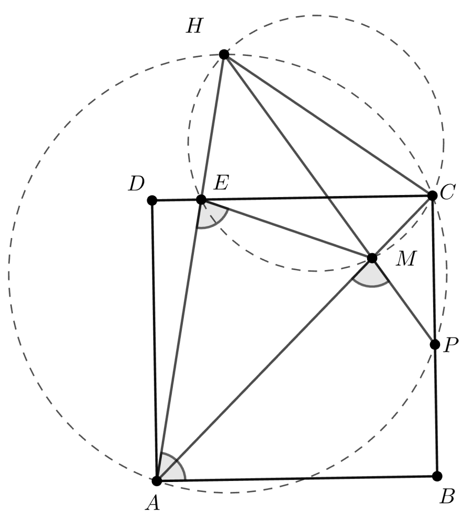
Obținem $n \leq y < x \leq n + 1$, deci $y = n, x = n + 1$ și soluția $a = n^2, b = n \cdot (n + 1), c = (n + 1)^2$. **1p**

Problema 4. Se consideră un pătrat $ABCD$ și punctele E pe latura CD, M pe diagonala AC și P pe latura BC, astfel încât $\sphericalangle BAE = \sphericalangle AEM = \sphericalangle AMP$. Arătați că:

a) Triunghiul AMP este isoscel.

b) $EM = DE + PB$.

Soluţie. a) Notăm $\sphericalangle BAE = \sphericalangle AEM = \sphericalangle AMP = \alpha$.



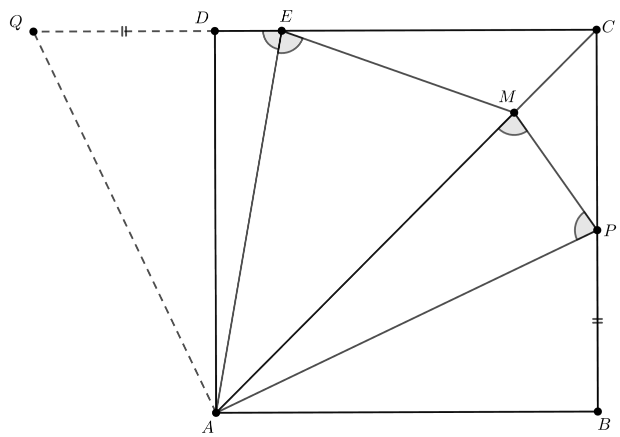
Avem, pe rând, $\sphericalangle DAE = 90° - \alpha$, $\sphericalangle EAC = \alpha - 45°$, $\sphericalangle DEA = \sphericalangle EAB = \alpha$, $\sphericalangle CEM = 180° - 2\alpha$ **1p**

Din triunghiul CPM, rezultă $\sphericalangle PMC = 180° - \sphericalangle AMP = 180° - \alpha$ și apoi $\sphericalangle CPM = \alpha - 45°$. Astfel $\sphericalangle EAC = \sphericalangle CPM = \alpha - 45°$. **1p**

Dacă notăm cu H intersecția dreptelor AE și PM, patrulaterul $HAPC$ având $\sphericalangle HAC = \sphericalangle HPC = \alpha - 45^\circ$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle AHP = \sphericalangle ACP = 45^\circ$. Mai mult, $\sphericalangle AHP = \sphericalangle EHM = \sphericalangle ECM = 45^\circ$, astfel că patrulaterul $HEMC$ este inscriptibil, iar $\sphericalangle HCM = \sphericalangle AEM = \alpha$ **1p**

Revenind în patrulaterul inscriptibil $HAPC$, avem $\sphericalangle HPA = \sphericalangle HCA = \alpha$, deci triunghiul AMP este isoscel. **1p**

b) În triunghiul isoscel MAP avem $\sphericalangle MAP = 180^\circ - 2 \cdot \alpha$, astfel că $\sphericalangle PAB = \sphericalangle CAB - \sphericalangle MAP = 45^\circ - (180^\circ - 2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \alpha) - 135^\circ$. **1p**



Prelungim latura CE cu segmentul $DQ = BP$. Din congruența triunghiurilor ADQ și ABP (*C.C.*) rezultă $\sphericalangle QAD = \sphericalangle PAB = 2 \cdot \alpha - 135^\circ$. $\sphericalangle EAQ = \sphericalangle EAD + \sphericalangle DAQ = \alpha - 45^\circ$, adică $\sphericalangle EAQ = \sphericalangle EAM$. **1p**
Mai mult, avem congruența triunghiurilor EAQ și EAM $(U.L.U)$, de unde rezultă $EM = EQ = ED + DQ = ED + BP$. **1p**