INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN GALAŢI
Str.Portului Nr.55 B ☎ **0372362000; 0372362001** 🖷 **0236319396**
E-mail: info@isj.gl.edu.ro; Adresă site: www.isj.gl.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

28 februarie 2016

Clasa a X-a

Problema 1.

a) Să se rezolve ecuaţia: $z^{n+1} = \bar{z},\ z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$.

b) Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \log_2 \dfrac{y}{x} \\ 3^{x^2+y^2-1} - 4 \cdot 3^{x \cdot y} + 9 = 0 \end{cases}$$

Problema 2.

Fie punctele $\mathrm{A}(1,1)$ şi $\mathrm{B}(4,2)$. Să se determine coordonatele celorlalte vârfuri ale pătratelor, astfel încât A şi B să fie vârfuri.

Problema 3.

Fie A o mulţime finită de numere reale strict pozitive. Să se determine funcţiile $f : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ care îndeplinesc condiţia: $(f \circ f)(x) = 2 \cdot f(x) - x,\ (\forall) x \in \mathrm{A}$.

Problema 4.

Fie $p,\ n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq 3$. Să se demonstreze inegalitatea:

$\left(p - \dfrac{p-1}{n}\right) \cdot \left(p - \dfrac{2 \cdot p - 1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p - \dfrac{n \cdot p - 1}{n}\right) > \dfrac{1}{n!}$, apoi să se deducă inegalitatea: $(n!)^2 > n^n$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

28 februarie 2016

Clasa a X-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. probleme	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	Pentru n=0, obţinem z=$\overline{z}$ $\Rightarrow$ soluţiile ecuaţiei sunt: $z\in\mathbb{R}$	**1p**
	Fie n ≥ 1, observăm că z=0 este soluţie. Fie z $\neq 0$ şi n $\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 1$; Aplicând modulul ecuaţiei $\Rightarrow \left\|z\right\|^{n+1}=\left\|\overline{z}\right\| \Rightarrow \left\|z\right\|^{n}=1 \Rightarrow \left\|z\right\|=1 \Rightarrow z\cdot\overline{z}=1$	**1p**
	Atunci ecuaţia devine: $z^{n+1}=\frac{1}{z} \Rightarrow z^{n+2}=1 \Rightarrow z_k=\cos\frac{2k\pi}{n+2}+i\sin\frac{2k\pi}{n+2},\ k\in\overline{0,n+1}$;	**1p**
	Pentru n ≥ 1, soluţiile ecuaţiei sunt: $z\in\{0\}\cup\left\{\cos\frac{2k\pi}{n+2}+i\sin\frac{2k\pi}{n+2},\ k\in\overline{0,n+1}\right\}$	**1p**
	b) Din condiţia $\frac{y}{x}>0 \Rightarrow x>0, y>0$ sau $x<0$, $y<0$; Se observă că dacă perechea (x,y) este soluţie, atunci şi perechea $(-x,-y)$ este soluţie.	1p
	Este suficient să rezolvăm sistemul pentru cazul $x>0, y>0$; Prima ecuaţie se scrie: $x^2+\log_2 x=y^2+\log_2 y;(1)$ Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\log_2 x$, f este strict crescătoare $\Rightarrow$ f este injectivă;	1p
	$(1)\Leftrightarrow f(x)=f(y) \overset{f\ injectiv\breve{a}}{\Rightarrow} x=y$; Sistemul de ecuaţii devine: $\begin{cases} x=y \\ 3^{2\cdot x^2-1}-4\cdot 3^{x^2}+9=0 \end{cases}$ Notăm $3^{x^2}=t, t>0$ $t^2-12\cdot t+27=0 \Rightarrow t_1=3, t_2=9 \Rightarrow x=\pm 1, x=\pm\sqrt{2}$; Soluţii sunt: $(1,1);(-1,-1);(\sqrt{2},\sqrt{2});(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$	1p

2.	a) Fie AB este o latură a pătratului. Există două pătrate care au ca latură pe AB, situate în semiplane opuse determinate de dreapta AB: ABCD şi ABC′D′. Afixul punctului $A(1,1)$ este $z_A=1+i$; Afixul punctului $B(4,2)$ este $z_B=4+2\cdot i$ Pentru a afla coordonatele punctului D, punem condiţia: $z_D - z_A=(z_B - z_A)\cdot i \Leftrightarrow$ $z_D=1+i+(3+i)\cdot i=4\cdot i \Rightarrow D(0,4)$; Pentru a afla coordonatele punctului C, punem condiţia: $z_C - z_D=(z_A - z_D)\cdot i \Leftrightarrow z_C=4\cdot i+(1+i-4i)\cdot i=3+5i \Rightarrow C(3,5)$; Punctele D si D′ sunt simetrice faţă de punctul A $\Rightarrow z_A=\frac{z_D+z_{D'}}{2} \Rightarrow z_{D'}=2\cdot z_A-z_D \Rightarrow$ $z_{D'}=2-2\cdot i \Rightarrow D'(2,-2)$. Punctele C si C′ sunt simetrice faţă de punctul B $\Rightarrow z_B=\frac{z_C+z_{C'}}{2} \Rightarrow z_{C'}=2\cdot z_B-z_C \Rightarrow$ $z_{C'}=5-\cdot i \Rightarrow C'(5,-1)$.	**1p** **1p** **1p** **1p**
	b)Fie AB este o diagonală a pătratului. Există pătratul AEBF, unde punctul E este centrul pătratului ABCD, iar F este centrul pătratului ABC′D′. $z_E=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{1+i+3+5i}{2}=2+3i \Rightarrow E(2,3)$; $z_F=\frac{z_A+z_{C'}}{2}=\frac{1+i+5-i}{2}=3 \Rightarrow F(3,0)$;	**1p** **1p** **1p**
3.	Observăm că funcţia $f(x)=x,\ (\forall)x\in A,$ satisface condiţia din enunţ. Fie A=$\{x_1,x_2,x_3,...,x_k\}, 0<x_1<x_2<x_3<...<x_k$; Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, definit astfel: $a_0=x_1,\ a_1=f(x_1),\ a_2=f(f(x_1)),...,a_n=\underbrace{(f\circ f\circ f\circ...\circ f)}_{\text{de } n \text{ ori f}}(x_1)$ $(f\circ f)(x_1)-f(x_1)=f(x_1)-x_1 \Rightarrow a_2-a_1=a_1-a_0$; Analog, $a_3-a_2=a_2-a_1=a_1-a_0$. Deducem că: $a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}=...=a_1-a_0$	**2p** **1p** **1p**

	Dar $f(x_1) \in \mathrm{A} \Rightarrow f(x_1) \geq x_1$; Dacă presupunem că $f(x_1) > x_1$, atunci şirul (a_n) este strict crescător, şi cum termenii şirului $(a_n) \in A \Rightarrow$ că mulţimea A ar conţine o infinitate de elemente-fals. Atunci $f(x_1) = x_1$; Funcţia f este injectivă pentru că: din $f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow$ $2 \cdot f(x) - x = 2 \cdot f(y) - y \Rightarrow x = y$ Din f injectivă $\Rightarrow \mathrm{f}(x_2) > x_1$. Aplicând procedeul de mai sus pentru x_2, obţinem $\mathrm{f}(x_2) = x_2$; Continuând, prin aplicarea procedeului, obţinem că $\mathrm{f}(x) = x, (\forall) x \in A$.	**1p** 1p 1p
4.	Vom demonstra că $p - \frac{kp-1}{n} > \frac{1}{k},\ 2 \leq k \leq n-1,\ (1)$ Avem $(1) \Leftrightarrow p \cdot k \cdot n - k^2 \cdot p + k > n \Leftrightarrow k \cdot p \cdot (k-n) - (k-n) < 0 \Leftrightarrow (k-n) \cdot (kp-1) < 0$; pentru $2 \leq k \leq n-1$, această ultimă inegalitate este adevărată. Din (1) obţinem: $p - \frac{2 \cdot p - 1}{n} > \frac{1}{2}$ $p - \frac{3 \cdot p - 1}{n} > \frac{1}{3}$ .... $p - \frac{(n-1)p - 1}{n} > \frac{1}{n-1}$ $p - \frac{np-1}{n} = \frac{1}{n}$ $p - \frac{p-1}{n} \geq 1$ (deoarece $n \cdot p - p + 1 \geq n \Leftrightarrow (p-1) \cdot (n-1) \geq 0 - adevărat$) Înmulţind aceste inegalităţi membru cu membru, obţinem inegalitatea din enunţ.	**3p** **2p**
	Pentru p=1, obţinem $\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{n!}$ sau $(n!)^2 > n^n$. Această inegalitate se demonstrează şi prin inducţie matematică, folosind inegalitatea $\mathrm{n}+1 > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, n \geq 3$.	**2p**