Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Satu Mare, 4 aprilie 2018

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a VII-a

Problema 1. Determinaţi numerele naturale nenule distincte a, b, c, d, care au simultan proprietăţile:
(1) Exact trei din cele patru numere sunt prime;
(2) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2018$.

Soluţie. $2018 = \mathcal{M}4 + 2$, două numere sunt pare şi două impare, un număr este 2 .... 1 punct.
$2018 = \mathcal{M}3 + 2$, două numere sunt multipli de 3 şi două $\mathcal{M}3 \pm 1$, un număr este 3 .... 1 punct.
Dacă $a < b < c < d$, atunci $a = 2, b = 3$, $c^2 + d^2 = 2005$, $c = 6k$ sau $d = 6k$ .... 2 puncte.
$k \leq 7$, analiza cazurilor .... 2 puncte.
$k = 3,\ a = 2,\ b = 3\ , c = 18,\ d = 41$ şi permutările lor circulare .... 1 punct.

Problema 2. În pătratul $ABCD$ punctul E este situat pe latura $[AB]$, iar F este piciorul perpendicularei din B pe dreapta DE. Punctul L aparţine dreptei DE astfel încât F este între E şi L, iar $FL = BF$. Dacă N şi P sunt simetricele punctelor A şi F faţă de dreptele DE, respectiv BL, demonstraţi că:
a) Patrulaterul $BFLP$ este pătrat şi patrulaterul $ALND$ este romb.
b) Aria rombului $ALND$ este egală cu diferenţa dintre ariile pătratelor $ABCD$ şi $BFLP$.

Soluţie.

a) $\triangle FLB$ dreptunghic isoscel, $BFLP$ pătrat .... 1 punct.
$m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{BFD}) = 90°$, $AFBD$ patrulater inscriptibil, $m(\widehat{AFB}) = 135°$,
$m(\widehat{AFL}) = 360° - 135° - 90° = 135°$ .... 1 punct.
$\triangle AFL \equiv \triangle AFB\ (LUL), AL = AB = AD$, $ALND$ romb .... 1 punct.
b) LN intersectează AB şi CD în Q respectiv R, $RQ \perp AB$, $AQRD$ dreptunghi,
$\triangle ALQ \equiv \triangle DNR\ (IC)$, $A_{ALND} = A_{AQRD}$ .... 1 punct.
$m(\widehat{BFL}) = m(\widehat{LQB}) = 90°$, $BQFL$ patrulater inscriptibil, $m(\widehat{FQB}) = 135°$ 1 punct.
$\triangle AFL \sim \triangle AFB\ (UU), \frac{AB}{FB} = \frac{BF}{BQ}, AB \cdot BQ = BF^2 = BC \cdot BQ$,
$A_{BCRQ} = A_{BFLP}, A_{ALND} = A_{ABCD} - A_{BFLP}$ .... 2 puncte.

Problema 3. Pe laturile $[AB]$ şi $[BC]$ ale paralelogramului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABE şi BCF, astfel încât punctele D şi E sunt de aceeaşi parte a dreptei AB, iar F şi D de o parte şi de alta a dreptei BC. Dacă punctele E, D şi F sunt coliniare, atunci demonstraţi că $ABCD$ este romb.

Soluţie. AC şi DF sunt concurente, $AC \cap DF = \{T\}$ .... 1 punct.
<u>Cazul 1</u> $m(\widehat{BAD}) \leq 60°$, ordinea punctelor $E - D - T - F$ sau

$60° < m(\widehat{BAD}) \leq 120°$, ordinea punctelor $D-E-T-F$:
Dacă $D = E$, atunci $ABCD$ romb;
$\triangle ABC \equiv \triangle EBF$ (LUL), $\widehat{BAT} \equiv \widehat{BEF}$ .... 1 punct.
$AETB$ patrulater inscriptibil, $m(\widehat{BTA}) = m(\widehat{ATE}) = 60°$, $[TA$ bisectoarea lui $\widehat{DTB}$, TA este mediatoarea lui $[BD]$, $ABCD$ romb .... 2 puncte.
Cazul 2 $m(\widehat{BAD}) \geq 120°$, ordinea punctelor $D-T-E-F$:
Dacă $T = E$, atunci $ABCD$ romb;
$T \neq E, C \in (AT)$, $\triangle ABC \equiv \triangle EBF$ (LUL), $\widehat{BEF} \equiv \widehat{BAT}$, $\widehat{BFE} \equiv \widehat{BCA}$ ... 1 punct.
$ATEB$ patrulater inscriptibil, $m(\widehat{ATB}) = m(\widehat{BTE}) = 60° = m(\widehat{DTC})$,
$[TC$ bisectoarea lui $\widehat{DTB}$, TC este mediatoarea lui $[BD]$, $ABCD$ romb ... 2 puncte.

Problema 4. Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $\sqrt{\dfrac{20^n - 18^n}{19}}$ este număr raţional.

Soluţie. $n = 0$ este soluţie .... 1 punct.
pentru $n \geq 1$, $\frac{20^n-18^n}{19}$ pătrat perfect, $20^n - 18^n = 19x^2$, $2^n(10^n - 9^n) = 19x^2$, x natural nenul; n par, $n = 2m$, m natural nenul .... 1 punct.
$2^{2m}(10^{2m} - 9^{2m}) = 19x^2$, x natural nenul, $x = 2^m y$, y impar, $10^{2m} - 9^{2m} = 19y^2$,
$(10^m - 9^m) \cdot (10^m + 9^m) = 19y^2, (10^m - 9^m, 10^m + 9^m) = 1$ .... 1 punct.
Cazul 1: Există a, b naturale impare, $(a, b) = 1, a \cdot b = y$ cu $10^m + 9^m = 19a^2$ şi
$10^m - 9^m = b^2$; $10^m = 9^m + b^2 = \mathcal{M}4 + 1 + \mathcal{M}4 + 1 = \mathcal{M}4 + 2$,
$m = 1, b = 1, a = 1, y = 1, x = 2, n = 2$ .... 2 puncte.
Cazul 2: Există a, b naturale impare, $(a, b) = 1, a \cdot b = y$ cu $10^m + 9^m = a^2$ şi
$10^m - 9^m = 19b^2$; $10^m = 9^m + 19b^2 = \mathcal{M}8 + 1 + 19(\mathcal{M}8 + 1) = \mathcal{M}8 + 4$,
$m = 2, b = 1, a^2 = 181$, contradicţie
$S = \{0, 2\}$ .... 2 puncte.