Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureş, 20 aprilie 2016
CLASA a X-a

Enunţuri şi bareme

Problema 1.

Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n \in (0, \infty)$ astfel încât $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$. Demonstraţi că funcţia

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = (1 + a_1^x) \cdot (1 + a_2^x) \cdot ... \cdot (1 + a_n^x)$$

este crescătoare.

Soluţie şi barem.

După înmulţiri obţinem

$f(x) = (1 + a_1^x) \cdot (1 + a_2^x) \cdot ... \cdot (1 + a_n^x) = 1 + \sum\limits_{1 \leq i \leq n} a_i^x + \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} a_i^x a_j^x + ... + a_1^x a_2^x ... a_n^x$ **1p**

Deoarece $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$, expresia funcţiei f poate fi scrisă ca o sumă de expresii de forma $a^x + \dfrac{1}{a^x}$, unde $a = a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_k}$, cu $k \leq n$. **2p**

Pentru orice $a > 0$, considerăm funcţia $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = a^x + a^{-x}$. Fie $t > 0$. Atunci $g(x+t) - g(x) = \dfrac{a^{2x+2t} + 1}{a^{x+t}} - \dfrac{a^{2x} + 1}{a^x} = \dfrac{a^{2x+2t} - a^{2x+t} - a^t + 1}{a^{x+t}} = \dfrac{(a^{2x+t} - 1)(a^t - 1)}{a^{x+t}} \geq 0$, deci funcţia g este crescătoare **3p**

Atunci funcţia f este crescătoare ca o sumă de funcţii crescătoare. **1p**

Problema 2.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietăţile

$$\begin{aligned} (P1)\, f(x+y) &\leq f(x) + f(y), \\ (P2)\, f(tx + (1-t)y) &\leq tf(x) + (1-t) f(y), \end{aligned}$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ şi $t \in [0, 1]$.

$a)$ Demonstraţi că oricare ar fi $a \leq b \leq c \leq d$, astfel încât $d - c = b - a$, are loc inegalitatea

$$f(b) + f(c) \leq f(a) + f(d).$$

b) Demonstraţi că

$$f\left(x_1+x_2+...+x_n\right)+(n-2)\left(f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+...+f\left(x_n\right)\right) \geq \sum_{1\leq i<j\leq n} f\left(x_i+x_j\right),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, şi $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

Soluţie şi barem. *a*) Ipoteza conduce la existenţa unui număr $t \in [0,1]$, astfel încât $b = ta + (1-t)\,d$ şi $c = (1-t)\,a + td$. **2p**

Aplicăm $(P2)$ şi obţinem

$$f(b) = f(ta + (1-t)\,d) \leq t\,(f(a)) + (1-t)\,f(d).$$

Analog, $f(c) \leq (1-t)\,f(a) + tf(d)$. Adunăm cele două inegalităţi şi obţinem concluzia. **1p**

b) Pentru început, demonstrăm cazul $n = 3$. Două dintre numerele x, y, z sunt simultan pozitive sau simultan negative. Fie x, y acestea. Dacă $x \geq 0$ atunci $z + (x+y+z) = (x+z) + (y+z)$ şi $z \leq x+z, y+z \leq x+y+z$. Punctul anterior conduce la

$$f(x+z) + f(y+z) \leq f(z) + f(x+y+z).$$

Concluzia se obţine prin adunarea inegalităţii anterioare cu inegalitatea $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. Dacă $x < 0$, atunci $x+y+z \leq y+z$, $z+x \leq z$ şi calculele sunt similare. **2p**

Presupunem acum inegalitatea adevărată pentru n şi o demonstrăm pentru $n+1$. Ipoteza de inducţie aplicată numerelor $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ şi $x_n + x_{n+1}$ conduce la:

$$\begin{aligned} & f\left(x_1+...+x_n+x_{n+1}\right) + (n-2)\left(f\left(x_1\right)+...+f\left(x_{n-1}\right)+f\left(x_n+x_{n+1}\right)\right) \\ \geq & \sum_{1\leq i<j\leq n-1} f\left(x_i+x_j\right) + \sum_{1\leq i\leq n-1} f\left(x_i+x_n+x_{n+1}\right). \end{aligned}$$

Concluzia se deduce dacă folosim inegalitatea

$$f\left(x_i+x_n+x_{n+1}\right) \geq f\left(x_i+x_n\right)+f\left(x_i+x_{n+1}\right)+f\left(x_n+x_{n+1}\right)-f\left(x_i\right)-f\left(x_n\right)-\left(x_{n+1}\right)$$

şi însumăm. **2p**

Problema 3.

a) În planul complex de origine O, considerăm punctele A şi B, de afixe nenule a şi respectiv b. Arătaţi că $S_{[OAB]} = \frac{1}{4}\left|\overline{a}b - a\overline{b}\right|$, unde $S_{[OAB]}$ reprezintă aria triunghiului OAB.

b) Fie ABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc $\mathcal{C}$ de centru O. Pentru un punct P interior cercului $\mathcal{C}$, notăm cu $S(P)$ aria triunghiului având lungimile laturilor egale cu distanţele de la P la vârfurile triunghiului. Fie P_1 şi P_2 două puncte distincte interioare cercului $\mathcal{C}$. Arătaţi $S(P_1) = S(P_2)$ dacă şi numai dacă $OP_1 = OP_2$.

Soluţie şi barem. a) Presupunem că triunghiul OAB este orientat în sens trigonometric. Atunci $m(\measuredangle AOB) = \arg\dfrac{b}{a}$, iar dacă este invers orientat obţinem $m(\measuredangle AOB) = \arg\dfrac{a}{b}$. Atunci $\sin(\measuredangle AOB) = \left|\dfrac{|a|}{2|b|}\left(\dfrac{b}{a} - \dfrac{\overline{b}}{\overline{a}}\right)\right| = \dfrac{\left|\overline{a}b - a\overline{b}\right|}{2|a||b|}$ şi deci $S_{[OAB]} = \dfrac{1}{2}OA \cdot OB \cdot \sin(\measuredangle AOB)$, de unde obţinem concluzia. **2p**

b) Fie $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$. Putem presupune că afixele punctelor A, B şi C sunt 1, ε, respectiv ε^2. Fie P, un punct de afix p, interior cercului. Atunci $(p-1) + \varepsilon(p-\varepsilon) + \varepsilon^2(p-\varepsilon^2) = 0$. Fie punctele $D(p-1)$, $E(\varepsilon(p-\varepsilon))$ şi $F(\varepsilon^2(p-\varepsilon^2))$. În plus, $OD = PA$, $OE = PB$ şi $OF = PC$.

Fie J, astfel încât $ODJF$ este paralelogram. Obţinem că punctul J are afixul opus afixului lui F. Atunci $OJ = PC$, iar triunghiul ODJ are laturile de lungimi PA, PB, PC. **2p**

Dar $S_{[ODJ]} = S_{[ODE]} = \dfrac{1}{4}\left|(\overline{p}-1)\cdot\varepsilon\cdot(p-\varepsilon) - (p-1)\cdot\overline{\varepsilon}\cdot(\overline{p}-\overline{\varepsilon})\right|$

$= \dfrac{1}{4}\left((\varepsilon-\varepsilon^2)|p|^2 - (\varepsilon-\varepsilon^2)\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left||p|^2 - 1\right|.$

Dar $|p| < 1$, deci $S_{[ODE]} = S(P) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(1 - |p|^2\right)$. **2p**

Revenind la punctele P_1 şi P_2 din ipoteză, notăm cu p_1, respectiv p_2, afixele lor. Atunci $S(P_1) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(1 - |p_1|^2\right)$, şi $S(P_2) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(1 - |p_2|^2\right)$. Atunci $S(P_1) = S(P_2)$ dacă şi numai dacă $|p_1| = |p_2|$, adică $OP_1 = OP_2$. **1p**

Problema 4.

Oamenii unui trib străvechi foloseau o limbă în care cuvintele erau formate doar cu literele A şi B. Cercetătorii au descoperit că pentru oricare două cuvinte de lungimi egale, există cel puţin trei poziţii corespondente în care literele sunt diferite. De exemplu, cuvintele $ABBAA$ şi $AAAAB$ diferă în poziţiile $2, 3$ şi 5, adică în trei poziţii.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Demonstraţi că în această limbă nu pot exista mai mult de $\left[\dfrac{2^n}{n+1}\right]$ cuvinte de lungime n ($[a]$ este partea întreagă a numărului real a).

Soluţie şi barem. Notăm cu C, mulţimea tuturor cuvintelor de lungime n, care s-ar putea forma (pot fi şi cuvinte care nu fac partea neapărat din limba tribului). Atunci $Card(C) = 2^n$ **1p**

Pentru două cuvinte oarecare x şi y, din C, notăm $d(x, y)$, numărul de poziţii în care literele sunt diferite. Evident $d(x, x) = 0$ şi $d(x, y) = d(y, x)$. Pentru

orice $x \in C$, definim mulţimea $C_x = \{y \in C \,|\, d(x, y) \leq 1\}$.
Atunci $Card(C_x) = n + 1$. **2p**

Dacă a, b sunt cuvinte de lungime n din limbă, atunci $d(a, b) \geq 3$, deci $C_a \cap C_b = \varnothing$. **2p**

Fie D mulţimea tuturor cuvintelor de lungime n din limbă. Atunci $\bigcup\limits_{a \in D} C_a \subset C$, de unde $Card\left(\bigcup\limits_{a \in D} C_a\right) \leq Card(C)$. Dar $Card\left(\bigcup\limits_{a \in D} C_a\right) = (n+1) \cdot Card(D)$, deci $(n+1) \cdot Card(D) \leq 2^n$, de unde $Card(D) \leq \dfrac{2^n}{n+1}$. Deoarece $Card(D) \in \mathbb{N}$, obţinem concluzia. **2p**