OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
15.02.2014

CLASA a X -a

PROBLEMA 1. Fie numerele $a_1, a_2, ..., a_{2014} \in (0, \infty)$ si functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a_1^x + a_2^x + ... + a_{2014}^x$. Daca $f(2014) = f(-2014) = 2014,$ aratati ca functia f este constanta.

PROBLEMA 2.a)Aratati ca $x^2 + y^2 \geq 2xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

b)Demonstrati ca daca $a, b, c \in (0,1)$ atunci are loc inegalitatea

$$\log_a \frac{4b}{b+4} + \log_b \frac{4c}{c+4} + \log_c \frac{4a}{a+4} \geq \frac{3}{2}.$$

Dragos Constantinescu

PROBLEMA 3.Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ si multimea $A = \{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 \,|\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0,1]\}$.

a)Aratati ca $\forall w \in A$ are loc inegalitatea $|z_1 + z_2 + z_3 - w| + |w| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|.$

b)Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ si orice $a_1, a_2, .., a_n \geq 0$ cu $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ si orice $w_1, w_2, ..., w_n \in A$ are loc inegalitatea

$$\left| z_1 + z_2 + z_3 - \sum_{k=1}^{n} a_k z_k \right| + \sum_{k=1}^{n} a_k |w_k| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|.$$

N.Bourbacut

PROBLEMA 4.a)Daca a,b,c,d sunt numere complexe de modul egal si $a + b + c + d = 0$ demonstrati ca numerele sunt afixele varfurilor unui dreptunghi.

b)Fie ABCD un patrulater inscris in cercul de raza 1.Fie G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor BCD,CDA,DAB,ABC.Sa se arate ca daca $AG_1 + BG_2 + CG_3 + DG_4 = \frac{16}{3}$,atunci ABCD este dreptunghi.

G.M.

NOTA.Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7.

BAREM CLASA a X-a

Problema 1.

$$f\left(2014\right)=2014\Rightarrow\frac{a_1^{2014}+a_2^{2014}+\ldots+a_{2014}^{2014}}{2014}=1\left(1p\right)$$
$$f\left(-2014\right)=2014\Rightarrow\frac{2014}{\frac{1}{a_1^{2014}}+\frac{1}{a_2^{2014}}+\ldots+\frac{1}{a_{2014}^{2014}}}=1\left(1p\right)$$

Deoarece media aritmetica a unor numere este egala cu media lor armonica $\Leftrightarrow$ numerele sunt egale,deduce ca $a_1^{2014}=a_2^{2014}=\ldots=a_{2014}^{2014}\Rightarrow a_1=a_2=\ldots=a_{2014}=a\left(notatie\right)$ (3p)

Atunci $f\left(x\right)=2014\cdot a^x$ iar din f(2014)=2014 rezulta $a^{2014}=1\Rightarrow a=1$ si in concluzie f(x)=2014, deci constanta.

Problema2.

a)Evident (1p)

b) Avem $b+4\geq 4\sqrt{b}$ (din a)),iar de aici $\frac{4b}{4+b}\leq\sqrt{b}$ care prin logaritmare in baza $a\in\left(0,1\right)$ obtinem $\log_a\frac{4b}{4+b}\geq\log_a\sqrt{b}=\frac{1}{2}\log_a b$.Analog obtinem inca doua inegalitati ,iar prin adunare rezulta $M_s\geq\frac{1}{2}\left(\log_a b+\log_b c+\log_c a\right)\geq\frac{3}{2}$ unde am folosit inegalitatea mediilor.(6p)

Problema 3.

a)Din $w\in A$ avem $w=\alpha_1z_1+\alpha_2z_2+\alpha_3z_3$ .Atunci

$$\left|z_1+z_2+z_3-w\right|+\left|w\right|=\left|\left(1-\alpha_1\right)z_1+\left(1-\alpha_2\right)z_2+\left(1-\alpha_3\right)z_3\right|+\left|\alpha z+\alpha z+\alpha z\right|\leq$$
$$\sum\left(1-\alpha_i\right)\left|z_i\right|+\sum\alpha_i\left|z_i\right|=\left|z_1\right|+\left|z_2\right|+\left|z_3\right|.\qquad(3p)$$

b) Analog cu punctul a). (4p)

Problema 4.

a) Punctele A,B,C,D de afixe a,b,c,d se afla pe un cerc de centru O si de raza r.Fie M si N punctele de afixe a+b si c+d .Din $\frac{\left(a+b\right)+\left(c+d\right)}{2}=0$ rezulta ca

O este mijlocul segmentului MN.Deoarece OAMB este romb rezulta $AB \perp OM$,analog $CD \perp MN$,deci AB este parallel cu CD.Analog demonstram ca AD este parallel cu BC,deci ABCD este un paralelogram inscriptibil,i.e.ABCD este dreptunghi.(3p)

b) Notam S=a+b+c+d.Aplicand inegalitatea C-B-S conditiei din enunt avem

$$\left(\frac{16}{3}\right)^2 = \left(AG_1 + BG_2 + CG_3 + DG_4\right)^2 \leq 4\left(AG_1^2 + BG_2^2 + CG_3^2 + DG_4^2\right) =$$
$$\frac{4}{9}\left(\sum |4a - S|^2\right)$$

Iar de aici, folosind $z\overline{z} = |z|^2$ obtinem S=a+b+c+d=0. Aplicand punctul a) obtinem cerinta problemei,i.e. ABCD=dreptunghi.(4p)