OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 21 februarie 2016
Clasa a VII- a

SUBIECTUL I (7 puncte)

a) Arătaţi că, dacă numerele raţionale a şi b îndeplinesc simultan condiţiile: $a + b < 4$ şi $ab - 2a - 2b + 4 > 0$, atunci $a < 2$ şi $b < 2$. **(4p)**

b) Să se arate că $x = \frac{5k-3}{4}$ și $y = \frac{7k-2}{6}$ nu pot fi ambele numere întregi, oricare ar fi k număr întreg. **(3p)**

SUBIECTUL II (7 puncte)

Să se determine cifrele a şi b (din baza 10) ştiind că numărul raţional $r = \overline{a,2(b)} + \overline{b,3(a)}$ se poate scrie sub formă de fracţie zecimală finită.

SUBIECTUL III (7 puncte)

Într-un triunghi ascuțitunghic, o înălțime și o mediană construite din vârfuri diferite formează un unghi cu masura de 60º. Arătați că înălțimea și mediana au aceeași lungime.

(Gazeta Matematică nr.9/2015)

SUBIECTUL IV (7 puncte)

Printr-un punct oarecare D situat pe latura (BC) a triunghiului ABC, diferit de mijlocul laturii, se duce paralela la mediana [AM], M ϵ (BC), care intersectează dreptele AB și AC în punctele E, respectiv F.

Demonstrați că:

a) AB·AF=AC·AE **(3p)**

b) DE+DF=constant **(4p)**

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

ISJ BOTOSANI

Bareme de corectare –cl.a VII-a

Etapa locală, Botoşani, 21 februarie 2016

Subiectul I (7 puncte)

a) **Arătaţi că, dacă numerele raţionale a şi b îndeplinesc simultan condiţiile: $a + b < 4$ şi $ab - 2a - 2b + 4 > 0$, atunci $a < 2$ şi $b < 2$.**

Soluţie:

$ab - 2a - 2b + 4 > 0 \Leftrightarrow (a-2)(b-2) > 0$ **(1p)**

Rezultă cazurile:

i) $a - 2 > 0$ şi $b - 2 > 0 \Rightarrow a + b > 4$ (fals) **(1p)**

ii) $a - 2 < 0$ şi $b - 2 < 0 \Rightarrow a + b < 4$ **(1p)**

Din $a - 2 < 0$ şi $b - 2 < 0$, rezultă $a < 2$ şi $b < 2$ **(1p)**

b) **Să se arate că $x = \frac{5k-3}{4}$ şi $y = \frac{7k-2}{6}$ nu pot fi ambele numere întregi, oricare ar fi k număr întreg.**

Soluție:

Dacă $x \in Z \Longrightarrow 4 \mid 5k - 3 \Longrightarrow 4 \mid 4k + k - 3 \Longrightarrow 4 \mid k - 3 \Longrightarrow 2 \mid k - 3$ **(1p)**

Dacă $y \in Z \Longrightarrow 6 \mid 7k - 2 \Longrightarrow 6 \mid 6k + k - 2 \Longrightarrow 6 \mid k - 2 \Longrightarrow 2 \mid k - 2$ **(1p)**

$2 \mid k - 3$ și $2 \mid k - 2$ (contradicție), de unde rezultă concluzia. **(1p)**

Subiectul II (7 puncte)

Să se determine cifrele a şi b (din baza 10) ştiind că numărul raţional $r = \overline{a,2(b)} + \overline{b,3(a)}$ se poate scrie sub formă de fracţie zecimală finită.

Soluție:

Avem $r = \overline{a,2(b)} + \overline{b,3(a)} = \frac{\overline{a2b} - \overline{a2}}{90} + \frac{\overline{b3a} - \overline{b3}}{90} = \frac{90 \cdot a + b + 18}{90} + \frac{a + 90 \cdot b + 27}{90} = \frac{91 \cdot a + 91 \cdot b + 45}{90}$

(2p) **(1p)**

Dar r este fracţie zecimală finită numai dacă 9 divide $91 \cdot a + 91 \cdot b + 45$ **(1p)**

$9/(91(a+b) + 45) \Longrightarrow 9/(91(a+b)) \Longrightarrow 9/(a+b)$ **(1p)**

Dar $a, b \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\} \Longrightarrow 0 \leq a+b \leq 16 \Longrightarrow a+b=0$ sau $a+b=9$ **(1p)**

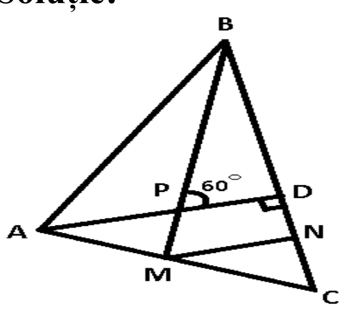
$\Longrightarrow (a;b) \in \{(0;0) ; (1;8) ; (2;7) ; (3;6) ; (4;5) ; (5;4) ; (6;3) ; (7;2) ; (8;1)\}$ **(1p)**

Subiectul III (7 puncte)

Într-un triunghi ascuțitunghic, o înălțime și o mediană construite din vârfuri diferite formează un unghi cu masura de 60°. Arătați că înălțimea și mediana au aceeași lungime.

(Gazeta Matematică nr.9/2015)

Soluție:



Δ ABC ascuțitunghic: construim înălțimea [AD] și mediana [BM].

$AD \cap BM = \{\mathbf{P}\}; m(\sphericalangle(AD, BM)) = m(\sphericalangle BPD) = 60^\circ$

Construim $MN \perp BC$, $N \in (BC) \Rightarrow MN \parallel AD$ **(2p)**

$\Delta BDP : m(\sphericalangle D) = 90^\circ$ și $m(\sphericalangle P) = 60^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle PBD) = 30^\circ$ **(1p)**

ΔBNM: $m(\sphericalangle N) = 90^\circ$ și $m(\sphericalangle MBN) = 30^\circ \Rightarrow MN = \frac{BM}{2}$ (i) **(1p)**

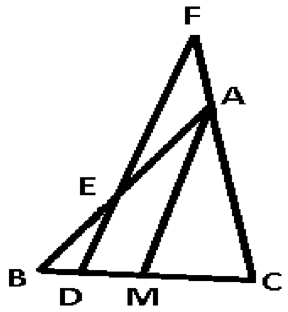
ΔADC: Dacă M este mijlocul lui [AC] și $MN \parallel AD \Rightarrow$[MN] este linie mijlocie

$\Rightarrow MN = \frac{AD}{2}$ (ii) **(2p)**

Din (i) și (ii) $\Rightarrow$ AD = BM **(1p)**

Subiectul IV (7 puncte)

Printr-un punct oarecare D situat pe latura (BC) a triunghiului ABC diferit de mijlocul laturii, se duce paralela la mediana [AM], $M \in (BC)$, care intersectează dreptele AB și AC în punctele E, respectiv F.



Demonstrați că:

a) $AB \cdot AF = AC \cdot AE$ **(3p)**
b) DE+DF=constant **(4p)**

Soluție: Aplicăm Teorema lui Thales în triunghiurile:

Δ CFD:$AM \parallel FD \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{DM}{MC}$ (1) **(1p)**

Δ BAM:$ED \parallel AM \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{DM}{BM}$ (2) **(1p)**

Deoarece BM =MC, din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AB \cdot AF = AC \cdot AE$ **(1p)**

a) Aplicăm teorema fundamentală a asemănării în aceleași triunghiuri și obținem:

$\Delta MAC \sim \Delta DFC \Rightarrow \frac{MA}{DF} = \frac{MC}{DC} \Rightarrow DF = \frac{MA \cdot DC}{MC}$ **(1p)**

$\Delta DBE \sim \Delta MBA \Rightarrow \frac{DE}{MA} = \frac{BD}{BM} \Rightarrow DE = \frac{MA \cdot BD}{BM}$ **(1p)**

Deoarece BM = MC, avem: $DE + DF = \frac{MA \cdot BD}{BM} + \frac{MA \cdot DC}{MC}$ **(1p)**

$DE + DF = \frac{MA \cdot (BD + DC)}{BM} = \frac{MA \cdot BC}{BM} = \frac{MA \cdot 2BM}{BM} = 2AM =$ constant **(1p)**