R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a IX-a

PROBLEMA 1

Demonstraţi că sirul $(a_n)_{n\in N^*}$ *este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă:*

$$a_1 + 2a_2 + 2a_3 + \quad + 2a_{n-1} + a_n = (n-1)(a_1 + a_n), \forall n \in N, n \geq 3.$$

PROBLEMA 2

Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\{x\} - \{2014\text{x}\} = x$.

PROBLEMA 3

Arătaţi că:

a) $x^3 - 3x + 2 \geq 0, \forall x \in [0, \infty)$

b) Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$ *şi* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$ *, atunci* $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$.

PROBLEMA 4

Pe cercul $\mathcal{C}$ *de centru O se consideră punctele distincte A, B, C. Demonstraţi că dacă* $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}|$ *atunci* $AB = BC = CA$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Punctajul maxim acordat pentru fiecare problemă este de 7 puncte.

R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a IX-a

Barem de evaluare şi notare

PROBLEMA 1

Demonstraţi că sirul $(a_n)_{n\in N^*}$ *este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă:*

$$a_1+2a_2+2a_3+\quad+2a_{n-1}+a_n=(n-1)(a_1+a_n),\ \forall n\in N,\ n\geq 3.$$

<u>Soluţie:</u>

Demonstraţi că sirul $(a_n)_{n\in N^*}$ este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă:

$$a_1+2a_2+2a_3+\quad+2a_{n-1}+a_n=(n-1)(a_1+a_n),\ \forall n\in N,\ n\geq 3.$$

$"\Rightarrow"$ $(a_n)_{n\in N^*}$ progresie aritmetică, $a_1+2a_2+2a_3+...+2a_{n-1}+a_n=$

$=2(a_1+a_2+.....+a_n)-(a_1+a_n)=(a_1+a_n)n-(a_1+a_n)$ ....*2 punct*

$=(n-1)(a_1+a_n)$ ....*1 punct*

$"\Leftarrow"$Notăm $a_2-a_1=r$ si $P(n):a_n-a_{n-1}=4$, $n\geq 3$ ....*1 punct*

$a_1+2a_2+a_3=2(a_1+a_3)\Leftrightarrow a_3-a_2=a_2-a_1=r\Rightarrow a_1,a_2,a_3$ sunt in progresie aritmetică de raţie, deci P(3) este adevarată.. ....*1punct*

Fie $n\geq 3$. Presupunem *P(n)* adevarată, deci $a_n=a_1+(n-1)r$. Scădem egalitatea din ipoteza pentru *n* termeni din cea pentru *n*+1 termeni şi obţinem

$a_n+a_{n+1}=a_1+na_{n+1}-(n-1)a_n\Leftrightarrow a_n+a_{n+1}=a_n-(n-1)r+na_{n+1}-(n-1)a_n$
$\Leftrightarrow a_{n+1}=a_n+r$, deci *P(n+1)* este adevarată...................................*2 punct*

P(n) este adevarată $\forall n\in N, n\geq 3$, deci $(a_n)_{n\in N^*}$ este progresie aritmetică.

PROBLEMA 2

Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\{x\}-\{2014x\}=x$.

<u>Soluţie:</u>

Ecuaţia se scrie sub forma $\{2014x\}=-[x]$ ………………………*1 punct*

Deoarece $\{2014x\} \in [0,1)$, rezultă că $[x] \in (-1,0]$ ....*1 punct*

Atunci $[x] = 0$, de unde $x \in [0,1)$ ....*1 punct*

Astfel $\{2014x\} = 0$, deci $2014x = k \in Z$, de unde $x = \frac{k}{2014}$ .... *2 puncte*

Soluţiile ecuaţiei sunt de forma $x = \frac{k}{2014}$, unde $k \in \{0,1,...,2013\}$............. *2 puncte*

PROBLEMA 3

Arătaţi că:

a) $x^3 - 3x + 2 \geq 0, \forall x \in [0,\infty)$

b) Dacă $a,b,c \in (0,\infty)$ *şi* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$ *, atunci* $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$.

<u>Soluţie:</u>

a) $x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 - x - 2) = (x-1)^2(x+2) \geq 0,\ \forall x \geq 0$ cu egalitate pentru $x = 1$

.....*3 puncte*

b) $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ rezultă $x^3 \geq 3 - \frac{2}{x},\ \forall x \in (0,+\infty)$.................................... *2 puncte*

deci $\begin{cases} a^2 \geq 3 - \frac{2}{a} \\ b^2 \geq 3 - \frac{2}{b} \\ c^2 \geq 3 - \frac{2}{c} \end{cases}$ .... *1 punct*

de unde prin adunare $a^2 + b^2 + c^2 \geq 9 - 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 - 2 \cdot 3 = 3$ .... *1 punct*

PROBLEMA 4

Pe cercul $\mathcal{C}$ de centru O se consideră punctele distincte A, B, C. Demonstraţi că dacă $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}|$ *atunci* $AB = BC = CA$.

<u>Soluţie:</u>

Avem $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE};\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF}$ (se construiesc paralelogramele OAEB şi OBFC (sunt romburi))$\Rightarrow OE = OF$......... ....*3 puncte*

$\Rightarrow \Delta OBF \equiv \Delta OBE\ (L.L.L) \Longrightarrow \measuredangle EOB \equiv \measuredangle FOB \Longrightarrow \measuredangle AOB \equiv \measuredangle BOC \Longrightarrow AB = BC$

…………………………………………………………………………….3 puncte

Analog se arată că AB=AC deci rezultă concluzia……………………….. *1 punct*