Barem clasa a XII-a
(OLM 2016-etapa locală)

Subiectul I. (7 puncte)

Înmulţind egalitatea dată cu e^{-x} obţinem $f(x)e^{-x}-F(x)e^{-x}=|x-1|e^{-x}$, **(1 punct)**

care se mai poate scrie $\left(F(x)\cdot e^{-x}\right)'=\begin{cases}(-x+1)e^{-x}, x<1\\ (x-1)e^{-x}, x\geq 1\end{cases}$. **(2 puncte)**

Integrând, ajungem la $F(x)e^{-x}=\begin{cases}xe^{-x}+c_1, x<1\\ -xe^{-x}+c_2, x\geq 1\end{cases}$. Condiţia de continuitate este $c_2=\frac{2}{e}+c_1$. **(2 puncte)**

Obţinem: $F(x)=\begin{cases}x+ce^{x}, x<1\\ -x+\left(\frac{2}{e}+c\right)e^{x}, x\geq 1\end{cases}$, care prin derivare ne conduce la $f(x)=\begin{cases}1+ce^{x}, x>1\\ -1+\left(\frac{2}{e}+c\right)e^{x}, x\geq 1\end{cases}$ **(2 puncte)**

Subiectul II. (7 puncte)

a) Presupunem că $x^2\neq e, \forall x\in G, x\neq e$, Dar $x^2\neq e \Leftrightarrow x\neq x^{-1}$ **(2 puncte)**

Grupăm elementele lui $G\setminus\{e\}$ în perechi $\left(x,x^{-1}\right)$ și cum $x\neq x^{-1}$ pentru $x\neq e$, deducem că $G\setminus\{e\}$ are un număr par de elemente, fals, deci există $x\in G, x\neq e, x^2=e$ **(1 punct)**

b) $\int\frac{1}{x^{2016}+x}dx=\int\frac{x^{2014}}{x^{2015}\left(x^{2015}+1\right)}dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{x^{2014}}{x^{2015}+1}dx=\ln x-\frac{1}{2015}\ln\left(x^{2015}+1\right)+c$ **(4 puncte)**

Subiectul III. (7 puncte)

$$I_n=\int_0^2 f_n(x)\,dx+\int_2^4 f_n(x)\,dx\,, f_n(x)=\sqrt[n]{x^n+(4-x)^n};$$

Notăm:$I_1=\int_0^2 f_n(x)\,dx$ şi $I_2=\int_2^4 f_n(x)\,dx$. **(1 punct)**

$I_2=\int_2^4 f_n(x)\,dx=-\int_2^0\sqrt[n]{(4-u)^n+u^n}\,du=\int_0^2\sqrt[n]{u^n+(4-u)^n}\,du=I_1,\ (u=4-x)$. **(2 puncte)**

Acum, dacă $x\in[0,2]\Longrightarrow 0\leq x\leq 2$ şi

$0\leq\frac{x}{4-x}\leq 1\Leftrightarrow 0\leq\left(\frac{x}{4-x}\right)^n\leq 1,\forall x\in[0,2]\Leftrightarrow 1\leq\left(\frac{x}{4-x}\right)^n+1\leq 2,\forall\, x\in[0,2]\Leftrightarrow 4-x\leq(4-x)\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{x}{4-x}\right)^n+1}\leq\sqrt[n]{2}\cdot(4-x)$

(2 puncte)

Integrăm: $\int_0^2(4-x)\,dx\leq I_1\leq\sqrt[n]{2}\cdot\int_0^2(4-x)\,dx\Leftrightarrow 6\leq\lim_{n\to\infty}I_1\leq 1\cdot 6$

Astfel, $\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}(2\cdot I_1)=12$. **(2 puncte)**

Subiectul IV. (7 puncte)

$(yx)^2=yxyx=y\cdot y^3x\cdot x=x^2$, **(2 puncte)**

$(yx)^6=x^2\cdot x^2\cdot x^2=x^6=x^3\cdot x^3=e$, **(2 puncte)**

$(yx)^3=yx(yx)^2=yx\cdot x^2=y$, $y^2=e$, **(1 punct)**

$xy=y^2\cdot yx=e\cdot yx=yx$. **(2 puncte)**