Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală - 22 februarie 2014 - Maramureş

Clasa a IX –a

1. Să se determine funcţia $f : N^* \to N^*$ ştiind că pentru orice $n \in N^*$,

7 p
$$1^2 \cdot f(1) + 2^2 \cdot f(2) + \ldots + n^2 \cdot f(n) = \frac{n^2 \cdot (f(n)+1)^2}{4}.$$

G.M. 11/2013

2. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi ecuaţia $\left[\frac{x+a}{2}\right] = \frac{x+2014}{3}$.

3 p **a)** Pentru $a = 1$, să se rezolve ecuaţia.

2 p **b)** Să se determine $a \in R$ ştiind că mulţimea soluţiilor este $S = \{4025, 4028\}$.

2 p **c)** Există valori ale lui $a \in R$ pentru care ecuaţia are cel puţin 3 soluţii? Justificaţi.

3 p **3. a)** Să se arate că pentru orice $x \in R$, $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| \geq \frac{2}{3}$.

b) Să se arate că pentru orice $x \in R$,

4 p
$$\left|x - \frac{1}{1 \cdot 2}\right| + \left|x + \frac{1}{2 \cdot 3}\right| + \left|x - \frac{1}{3 \cdot 4}\right| + \left|x + \frac{1}{4 \cdot 5}\right| + \ldots + \left|x + \frac{1}{2n \cdot (2n+1)}\right| \geq \frac{2n}{2n+1}.$$

4. Fie triunghiul ABC şi punctele D, E, F astfel încât $B \in (AD)$, $C \in (BE)$, $A \in (CF)$ şi $BD = AC$, $CE = AB$, $AF = BC$.

Fie M, N, P respectiv mijloacele segmentelor $[DE]$, $[EF]$ şi $[FD]$.

3 p **a)** Să se arate că triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

2 p **b)** Să se arate că $MN < \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$.

2 p **c)** Să se arate că $(AM$ **nu** este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.

Dana Heuberger

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Subiecte selectate şi prelucrate de: prof. *Erika Darolţi*, Colegiul Naţional „Vasile Lucaciu" Baia Mare

prof. *Dana Heuberger*, Colegiul Naţional „Gheorghe Şincai" Baia Mare

prof. *Nicolae Muşuroia*, Colegiul Naţional „Gheorghe Şincai" Baia Mare