



Olimpiada de matematică
Faza locală - 20 februarie 2015

Clasa a XI-a

1. Să se calculeze

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right);$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{[x]} \right)^{x+1}$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}$.

2. Fie A o matrice pătratică de ordinul 2 cu elemente reale și A^t matricea transpusă

(i) Arătați că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $\det(A + x \cdot A^t) = (x^2 + 1) \cdot \det A + \alpha \cdot x, \forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) Știind că $\det(A + A^t) = 8$ și $\det(A + 2 \cdot A^t) = 27$, să se calculeze $\det(A)$.

GM 2014

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $C(A) = \{X \in M_3(\mathbb{R}) : A \cdot X = X \cdot A\}$

(i) Să se arate că $X \in C(A)$ dacă și numai dacă există $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel ca $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

(ii) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ecuația $X^n = A$ nu are nicio soluție.

4.

(i) Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \infty$;

(ii) Demonstrați că dacă $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, atunci există un șir $(s_n)_{n \geq 1}$ cu $s_n \in \{-1, 1\}$ pentru orice

$n \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{s_1}{1} + \frac{s_2}{2} + \dots + \frac{s_n}{n} \right) = l$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.



Olimpiada de matematică
Etapa locală - 20 februarie 2015

Clasa a XI-a

1.

(i) Din dubla inegalitate $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, $n \in \mathbb{N}^+$ 2p

și aplicând criteriul "cleștelui" deducem că limita este 1. 1p

Finalizare 1p

(ii) $x \rightarrow \infty \Rightarrow [x] \rightarrow \infty$ obținem nedeterminarea 1^∞ 1p

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{[x]} = 1$ 1p

Finalizare $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{x+1} = e$. 1p

2.

(i) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ atunci $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ 1p

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $A + x \cdot A^t = \begin{pmatrix} a+xa & b+xc \\ c+bx & d+dx \end{pmatrix}$ 1p

De unde $\det(A + x \cdot A^t) = x^2 \cdot \det(A) + x \cdot (2ad - b^2 - c^2) + \det(A)$ 1p

(ii) Din enunț și (i), avem $\det(A + A^t) = 8 = 2\det(A) + \alpha$ și $\det(A + 2 \cdot A^t) = 27 = 5\det(A) + 2\alpha$ 3p

Finalizare 1p

3.

(i) Fie $X = \begin{pmatrix} m & n & p \\ q & r & s \\ t & u & v \end{pmatrix} \in C(A)$, atunci din $X \cdot A = A \cdot X$ deducem că $m = r = v = a, n = s = b$ 2p

$p = c, q = t = u = 0$ 1p

Reciproc

(ii) Admitem că există $X \in M_3(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, astfel încât ecuația $X^n = A$, atunci 2p

$\det(X) = 0, X^{n+1} = A \cdot X = X \cdot A$.

În consecință există $b, c \in \mathbb{R}$ astfel ca $X = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 1p



Cum $X^n = O_3$ pentru $n \geq 3$ și $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, concluzia se impune. 1p

4.

(i) Șirul $(h_n)_{n \geq 1}$ definit prin $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este strict crescător; 1p

Dacă $(h_n)_{n \geq 1}$ este mărginit superior atunci el este convergent și atunci $h_{2n} - h_n \rightarrow 0$, cum 1p

$h_{2n} - h_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ s-a obținut o contradicție. 1p

(ii) Dacă $l = \infty$ sau $l = -\infty$ alegem $s_n = 1$ sau $s_n = -1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 1p

Admitem $l \geq 0$. Fie $n_1 \in \mathbb{N}^*$ cel mai mic număr astfel ca $\sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{i} > l$ și alegem

$s_1 = s_2 = \dots = s_{n_1} = 1$, iar $n_2 \in \mathbb{N}^*$ cel mai mic număr, $n_2 > n_1$ astfel ca $\sum_{i=1}^{n_1} s_i \frac{1}{i} - \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{1}{i} < l$ și

considerăm $s_{n_1+1} = \dots = s_{n_2} = -1$. Procedând în acest fel, având în vedere (i) și că

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ rezultă cerința (ii). Cazul $l < 0$ se deduce din cazul de mai sus. 3p

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.