Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale şi Cercetării Ştiinţifice

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureş, 20 aprilie 2016
CLASA a VIII-a

Problema 1. Vârfurile unei prisme se colorează cu două culori astfel încât capetele fiecărei muchii laterale să fie colorate diferit. Se consideră toate segmentele care unesc câte două vârfuri ale prismei, altele decât muchiile laterale. Arătaţi că numărul segmentelor cu capetele colorate diferit coincide cu numărul segmentelor cu capetele colorate la fel.

Problema 2. Într-un cub $ABCDA'B'C'D'$ se consideră două puncte $M \in (CD')$ şi $N \in (DA')$. Arătaţi că MN este perpendiculara comună a dreptelor CD' şi DA' dacă şi numai dacă $\dfrac{D'M}{D'C} = \dfrac{DN}{DA'} = \dfrac{1}{3}$.

Problema 3. Dacă a, b şi c sunt lungimile laturilor unui triunghi, arătaţi că

$$\frac{3}{2} \leq \frac{b+c}{b+c+2a} + \frac{a+c}{a+c+2b} + \frac{a+b}{a+b+2c} < \frac{5}{3}.$$

Problema 4. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ spunem că numerele naturale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au proprietatea $(\mathcal{P})$, dacă

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n.$$

a) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există n numere naturale nenule cu proprietatea $(\mathcal{P})$.

b) Determinaţi numerele naturale $n \geq 2$ pentru care există n numere naturale $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cu $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$, care au proprietatea $(\mathcal{P})$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureş, 20 aprilie 2016

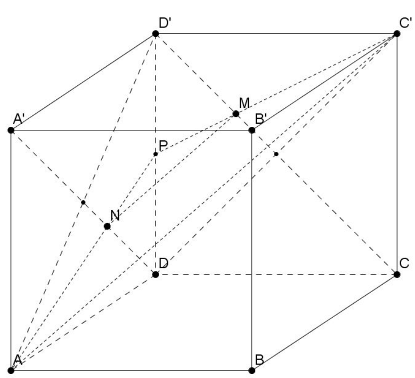
CLASA a VIII-a - Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Vârfurile unei prisme se colorează cu două culori astfel încât capetele fiecărei muchii laterale să fie colorate diferit. Se consideră toate segmentele care unesc câte două vârfuri ale prismei, altele decât muchiile laterale. Arătaţi că numărul segmentelor cu capetele colorate diferit coincide cu numărul segmentelor cu capetele colorate la fel.

Soluţie. Fie n numărul de laturi ale unei baze a prismei. Atunci numărul de segmente luate în considerare este $\frac{2n(2n-1)}{2} - n = 2(n^2 - n)$. **1p**
Fie a numărul vârfurilor bazei superioare colorate cu prima culoare, iar $b = n - a$ numărul vârfurilor bazei superioare colorate cu a doua culoare. Pe baza inferioară vor fi atunci b puncte colorate cu prima culoare şi a puncte colorate cu a doua culoare. **1p**
Numărul segmentelor cu capetele diferit colorate şi pe baze diferite este $a^2 + b^2 - n$.
Numărul segmentelor cu capetele diferit colorate aflate pe o aceeaşi bază este $2ab$.
Numărul total de segmente cu capetele colorate diferit este atunci $(a + b)^2 - n = n^2 - n$. **3p**
Numărul segmentelor cu capetele colorate la fel este atunci $2(n^2 - n) - (n^2 - n) = n^2 - n$ şi este egal cu cel al segmentelor cu capetele colorate diferit. **2p**

Problema 2. Într-un cub $ABCDA'B'C'D'$ se consideră două puncte $M \in (CD')$ şi $N \in (DA')$. Arătaţi că MN este perpendiculara comună a dreptelor CD' şi DA' dacă şi numai dacă $\dfrac{D'M}{D'C} = \dfrac{DN}{DA'} = \dfrac{1}{3}$.

Soluţie.



Dacă $\dfrac{D'M}{D'C} = \dfrac{DN}{DA'} = \dfrac{1}{3}$, atunci M şi N sunt centrele de greutate ale triunghiurilor $DD'C$ şi, respectiv, ADD', deci punctele C', M, P şi A, N, P sunt coliniare, unde P este mijlocul muchiei DD'.
. . . . **2p**
În triunghiul APC' avem $\dfrac{PM}{PC'} = \dfrac{PN}{PA}$, deci $MN \parallel AC'$. Iar $AC' \perp D'C$ şi $AC' \perp A'D$ ($(AC'D)$ este planul mediator al segmentului $D'C$, iar $(AD'C')$ este planul mediator al segmentului $A'D$.) Deci MN este perpendiculara comună a dreptelor CD' şi DA'
. . . . **3p**
Reciproc, dacă MN este perpendiculara comună a celor două drepte, acesta fiind unică, este cea din punctul anterior, deci $\dfrac{D'M}{D'C} = \dfrac{DN}{DA'} = \dfrac{1}{3}$ **2p**

Problema 3. Dacă a, b şi c sunt lungimile laturilor unui triunghi, arătaţi că

$$\frac{3}{2} \le \frac{b+c}{b+c+2a} + \frac{a+c}{a+c+2b} + \frac{a+b}{a+b+2c} < \frac{5}{3}.$$

Soluţie.
Inegalitatea $\dfrac{3}{2} \le \dfrac{b+c}{b+c+2a} + \dfrac{a+c}{a+c+2b} + \dfrac{a+b}{a+b+2c}$ este inegalitatea Nesbitt pentru tripletul de numere pozitive $(b + c, a + c, a + b)$. **2p**
Din inegalitatea triunghiului avem

$b+c>a \Leftrightarrow 3a+3b+3c>4a+2b+2c \Leftrightarrow \dfrac{2}{3(a+b+c)}<\dfrac{1}{2a+b+c} \Leftrightarrow \dfrac{4a}{3(a+b+c)}<\dfrac{2a}{2a+b+c} \Leftrightarrow$
$\dfrac{4a}{3(a+b+c)}<1-\dfrac{b+c}{2a+b+c}$ **3p**

Analog se arată că $\dfrac{4b}{3(a+b+c)}<1-\dfrac{a+c}{2b+a+c}$ şi $\dfrac{4c}{3(a+b+c)}<1-\dfrac{a+b}{2c+a+b}$. Adunând ultimele trei inegalităţi obţinem $\dfrac{4}{3}<3-\left(\dfrac{b+c}{b+c+2a}+\dfrac{a+c}{a+c+2b}+\dfrac{a+b}{a+b+2c}\right)$ echivalentă cu inegalitatea de demonstrat.. **2p**

Problema 4. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ spunem că numerele naturale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au proprietatea (P), dacă

$$x_1x_2\cdots x_n = x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n. \tag{1}$$

a) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există n numere naturale nenule cu proprietatea (P).

b) Determinaţi numerele naturale $n \geq 2$ pentru care există n numere naturale $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cu $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$, care au proprietatea (P).

Soluţie. a) Pentru $n=1$ orice număr natural x_1 verifică proprietatea (P).
Pentru $n=2$ egalitatea (1) este echivalentă cu $(x_1-2)(x_2-1)=2$ şi perechile (x_1,x_2) de numere naturale nenule care au proprietatea (P) sunt $(3,3)$ şi $(4,2)$.
Pentru $n \geq 3$, alegând $x_1=x_2=\cdots=x_{n-2}=1$, egalitatea (1) se reduce la $(x_{n-1}-n)(x_n-(n-1)) = n(n-1)+\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ şi este verificată de numerele $x_{n-1}=n+1$ şi $x_n = n-1+n(n-1)+\frac{(n-2)(n-1)}{2}=\frac{3n(n-1)}{2}$. **2p**
b) Evident, $x_1 \neq 0$, deoarece altfel $x_1x_2\ldots x_n = 0 < 0+2x_2+\cdots+nx_n = x_1+2x_2+\cdots+nx_n$.
Împărţind egalitatea (1) prin $x_1x_2\ldots x_n$, aceasta devine

$$1=\frac{1}{x_2x_3\ldots x_n}+\frac{2}{x_1x_3\ldots x_n}+\frac{3}{x_1x_2x_4\ldots x_n}+\cdots+\frac{n}{x_1x_2\ldots x_{n-1}}.$$

Deoarece $x_2x_3\ldots x_n > x_1x_3\ldots x_n > \cdots > x_1x_2\ldots x_{n-1} \geq (n-1)!$, rezultă că

$$1<\frac{1+2+\cdots+n}{(n-1)!}=\frac{n(n+1)}{2(n-1)!}$$

Pentru $2 \leq n \leq 4$, inegalitatea de mai sus are loc.
Pentru $n \geq 5$, scriind $n(n+1)=(n-1)(n-2)+4(n-1)+2$, aceasta devine

$$1<\frac{n(n+1)}{2(n-1)!}=\frac{(n-1)(n-2)+4(n-1)+2}{2(n-1)!}=\frac{1}{2(n-3)!}+\frac{2}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}\leq$$

$$\leq \frac{1}{2\cdot 2!}+\frac{2}{3!}+\frac{1}{4!}=\frac{1}{4}+\frac{2}{6}+\frac{1}{24}=\frac{5}{8}<1.$$

Rezultă că $n \in \{2,3,4\}$. **3p**
Pentru $n=2$ am văzut că perechile (x_1,x_2) de numere naturale nenule care au proprietatea (P) sunt $(3,3)$ şi $(4,2)$. Prin urmare nu există perechi care să satisfacă şi inegalitatea $x_1<x_2$.
Pentru $n=3$ putem alege $x_1=1$, $x_2=4$ şi $x_3=9$(ca în exemplul de la a)), care verifică inegalitatea $x_1<x_2<x_3$ şi au proprietatea (P).
Pentru $n=4$, alegând $x_1=1$ şi $x=2$, egalitatea (1) se reduce la $(2x_3-4)(2x_4-3)=22$ şi este verificată de $x_3=3$ şi $x_4=7$.
Prin urmare numerele naturale $n \geq 2$ care satisfac condiţia cerută sunt $n=3$ şi $n=4$. **2p**