OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 21 februarie 2016

Clasa a V- a

Subiectul I (7 p)

a) Determinaţi dacă numărul de mai jos este pătrat perfect
$n = [(2^7)^2 \cdot (2^2)^8 + 5^{50} : 5^5 - (7^{16})^2] : [(8^5)^2 + (125)^{15} - (7^{4^2})^2]$.
b) Arătaţi că diferenţa dintre jumătatea lui 8^{48}şi sfertul lui 4^{71}este divizibilă cu 14.

Subiectul II (7 p)

Aflaţi patru numere naturale, ştiind că suma lor este 55, primul număr este jumătate din cel de-al doilea, al treilea număr este media aritmetică a primelor două, iar al patrulea număr este dublul diferenţei dintre al doilea şi al treilea.

Gazeta Matematică

Subiectul III (7 p)

Fie mulţimea $A = \{\overline{abcd}, \overline{ab} = \overline{cd} + 4\}$
a) Determinaţi dacă 2016 şi respectiv 2024 aparţin mulţimii A.
b) Aflaţi restul împărţirii unui număr oarecare din A la 101.
c) Daca S este suma tuturor numerelor din A, arătaţi că S nu este pătrat perfect.

Subiectul IV (7 puncte)

Se consideră mulţimea numerelor formate numai din cifrele 1 şi 2, cu cel mult 2016 cifre.
a) Să se calculeze câte numere sunt cu 5 cifre.
b) Să se calculeze câte numere sunt în mulţime.
c) Să se arate că există în mulţime un număr divizibil cu 3^6.

Notă :
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 2 ore.

Str. General Berthelot nr. 28-30, Sector 1, 010168, Bucureşti
Tel: +40 21 405 62 00, Fax: +40 21 405 63 00
www.edu.ro

Str. N. Iorga nr. 28, 710213, Botoşani
Tel: +40 231584 050, Fax: +40 231584 052
E-mail: office.isjbt@gmail.com
www.isj.botosani.ro

Barem de notare si corectare Clasa a V a

Subiectul I.

a) Determinaţi dacă numărul de mai jos este pătrat perfect.

$[(2^7)^2 \cdot (2^2)^8 + 5^{50} : 5^5 - (7^{16})^2] : [(8^5)^2 + (5^3)^{15} - (7^{4^2})^2]$.

b) Arătaţi că diferenţa dintre jumătatea lui 8^{48}şi sfertul lui 4^{71}este divizibilă cu 14.

Soluţie

a) $n = (2^{14} \cdot 2^{16} + 5^{45} - 7^{32}) : (8^{10} + 5^{45} - (7^{16})^2) = (2^{30} + 5^{45} - 7^{32}) : (2^{30} + 5^{45} - 7^{32}) = 1$..**2p**

iar 1 este patrat perfect deorece $1 = 1^2$ **1p**

b)$8^{48} : 2 - 4^{71} : 4 = (2^3)^{48} : 2 - 4^{70} = 2^{144} : 2 - (2^2)^{70} = 2^{143} - 2^{140} = 2^{140}(2^3 - 1)$..........**2p**

Dar $2^{140}(2^3 - 1) = 2^{139} \cdot 2 \cdot 7 = 2^{139} \cdot 14$, deci divizibil cu 14...**2p**

Subiectul II

Aflaţi patru numere naturale, ştiind că suma lor este 55, primul număr este jumătate din cel de-al doilea, al treilea număr este media aritmetică a primelor două, iar al patrulea număr este dublul diferenţei dintre al doilea şi al treilea.

Gazeta Matematica

Solutie

Notăm numerele cu a, b, c, d. Avem urmatoarele relaţii

a+b+c+d=55, a=b:2, c=(a+b):2 si d=2 (b-c)..**1p**

Înlocuim pe b=2a in relaţia a treia şi obţinem c=3a:2, pe care de asemenea le substituim în ultima relaţie...**2p**

d=2(b-c)= 2(2a-3a:2)=4a-3a=a **……………………………………………………………..1p**

Avem toate necunoscutele exprimate în funcţie de *a* şi le înlocuim în suma lor

a+2a+3a:2+a=55. Înmulţind cu 2, obţinem 11*a*=110, de unde *a*=10....................................**2p**

Celelalte numere sunt b=20, c=15 şi d=10..**1**p

Subiectul III

Fie mulţimea $A = \{\overline{abcd}, \overline{ab} = \overline{cd} + 4\}$

a). Determinaţi dacă 2016 si respectiv 2024 aparţin mulţimii A.

b). Aflaţi restul împărţirii unui număr oarecare din A la 101.

c). Daca S este suma tuturor numerelor din A, arătaţi că S nu este pătrat perfect.

Soluţie

a). 2016 are 20 =16 + 4, iar 2024 nu verifica 20=24+4. Deci 2016 aparţine mulţimii, iar 2024 nu aparţine...**1p**

b). $\overline{abcd} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd} = (\overline{cd} + 4) \cdot 100 + \overline{cd} = \overline{cd} \cdot 101 + 400$...**2p**

Cum primul termen este divizibil cu 101, atunci restul împărţirii acestui numar la 101 este restul impărţirii lui 400 la 101, adica 97...**1p**

Este mai usor să scriem $\overline{abcd} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} - 4 = \overline{ab} \cdot 101 - 4$. Deoarece *a* nu poate fi 0 avem în total 90 de numere, şi asfel suma este:

$S = 10 \cdot 101 - 4 + 11 \cdot 101 - 4 + \ldots + 99 \cdot 101 - 4 = 101 \cdot (10 + 11 + \ldots + 99) - 4 \cdot 90 =$ $101 \cdot (99 \cdot 100 : 2 - 9 \cdot 10 : 2) - 360 = 101 \cdot (45 \cdot 110 - 45) - 360 = 45 \cdot (101 \cdot 110 - 101 - 8)$...**2p**

Observăm că numărul din ultima paranteză are ultima cifră 1 , deci nu este divizibil cu 5. Cum S este divizibil cu 5, dar nu este divizibil cu 25, concluzionăm că S nu este pătrat perfect...**1p**

Subiectul IV

Se consideră mulţimea numerelor formate numai din cifrele 1 şi 2, cu cel mult 2016 cifre.

a). Să se calculeze câte numere sunt cu 5 cifre.

b). Să se calculeze câte numere sunt în mulţime.

c). Să se arate că există în mulţime un numar divizibil cu 3^6.

Soluţie

a) Un numar de 5 cifre de forma are pentru fiecare cifra 2 posibilităţi, 1 şi 2, deci ele sunt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ numere...**2p**

b) Pentru fiecare numar $1 \leq k \leq 2016$, avem că în mulţime sunt 2^knumere cu k cifre.
Deci numărul de elemente din mulţime este
$N = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2016}$...**1p**

Adunăm 2 şi obţinem

$N + 2 = (2 + 2) + 2^2 + \ldots + 2^{2016} = 2^2 + 2^2 + 2^3 + \ldots 2^{2016} = (2^3 + 2^3) + \ldots + 2^{2016} = \ldots$
$= 2^{2016} + 2^{2016} = 2^{2017}$

Deci N=$2^{2017} - 2$...**2p**

c).Considerăm cele 2016 numere formate numai cu cifra 1. Deoarece
$2016 = 2^5 \cdot 9 \cdot 7 > 3^3 \cdot 3^2 \cdot 3 = 3^6$, cel puţin două dintre numere dau acelaşi rest la împărţirea cu 3^6..**1p**

Diferenţa acestor numere este de forma 111...11000...0=$11\ldots1 \cdot 10^t$ şi este divizibilă cu 3^6.
Cum 3 si 10 nu au divizor comuni, 3^6divide numărul format numai din cifre de 1, care apaţine lui A..**1p**