OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală – 9 februarie 2013

CLASA A VII-A

SOLUȚIE ŞI BAREM DE CORECTARE:

Subiectul I	**Punctaj**
$\frac{3a+4b+5c}{2a+3b}=\frac{3b+4c+5a}{2b+3c}=\frac{3c+4a+5b}{2c+3a}=\frac{12a+12b+12c}{5a+5b+5c}=\frac{12}{5}$ $A=\sqrt{\left(\frac{12}{5}+\frac{12}{5}+\frac{12}{5}\right)\cdot\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{36}{25}}=\frac{6}{5}$	4p 3p

Subiectul II	**Punctaj**
$U(2013^{2012})=U(3^{2012})=1$ $U(2012^{2013})=U(2^{2013})=2$ $[\Rightarrow U(2013]^{2012}+2012^{2013})=3\Rightarrow 2013^{2012}+2012^{2013}$ nu este pătrat perfect $\Rightarrow\sqrt{2013^{2012}+2012^{2013}}\notin\mathbb{Q}$	1p 1p 1p
Pentru n = 0, $6^0 + 2013 = 2014$, care nu este pătrat perfect. Pentru n > 0, $6^n + 2013$ este divizibil cu 3, dar nu este divizibil cu 9 $\Rightarrow 6^n + 2013$ nu este pătrat perfect $\Rightarrow \sqrt{6^n+2013}\notin\mathbb{Q}$	1p 2p 1p

Subiectul III	**Punctaj**
BC = 2AD ⇒ ΔABC este dreptunghic în A. DE ⊥ AC ⇒ DE ∥ AB. Dar DE = $\frac{AB}{2}$ ⇒ FE = AB şi FE ∥ AB ⇒ ABFE dreptunghi ⇒ EC ∥ FH şi [EC] ≡ [FH] (din ΔFGH ≡ ΔGCE) ⇒ EFHC dreptunghi ⇒ ABHC dreptunghi a cărui diagonală [AH] trece prin mijlocul D al diagonalei [BC].	1p 2p 2p 1p 1p

Subiectul IV	**Punctaj**
Fie MN mediatoarea laturii [AB] ⇒ ΔANB este isoscel ⇒ [AN] ≡ [BN] Aplicând teorema bisectoarei pentru ∢ ABC şi ∢ NAC, obținem: $\frac{AB}{BN}=\frac{AE}{EN}$ şi $\frac{AC}{AN}=\frac{CL}{LN}$ Cum [AB] ≡ [AC] şi [AN] ≡ [BN] $\Rightarrow\frac{AB}{BN}=\frac{AC}{AN}\Rightarrow\frac{AE}{EN}=\frac{CL}{LN}$	1p 2p 2p

Conform reciprocei teoremei lui Thales $\Rightarrow EL \parallel AC \Rightarrow LEAC$ este trapez	2p

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
etapa locală – 9 februarie 2013

CLASA A VII-A

SUBIECTE

I. Fie a, b, c $\in$ **Q*** astfel încât

$$\frac{3a+4b+5c}{2a+3b}=\frac{3b+4c+5a}{2b+3c}=\frac{3c+4a+5b}{2c+3a}$$

Aflaţi

$$A=\sqrt{\left(\frac{3a+4b+5c}{2a+3b}+\frac{3b+4c+5a}{2b+3c}+\frac{3c+4a+5b}{2c+3a}\right)\cdot\frac{1}{5}}$$

II. Arătaţi că $\sqrt{2013^{2012}+2012^{2013}}\notin \mathbf{Q}$ şi $\sqrt{6^n+2013}\notin \mathbf{Q}$ pentru orice număr natural n.

III. În triunghiul ABC, D este mijlocul segmentului BC şi $2\cdot AD = BC$. Fie $DE \perp AC$, $E \in (AC)$, F simetricul lui E faţă de punctul D, G mijlocul segmentului FC şi $\{H\} = BF \cap EG$. Demonstraţi că punctele A, D, H sunt coliniare.

(G.M. nr. 7-8-9/2011)

IV. În triunghiul ascuţitunghic ABC, cu $[AB] \equiv [AC]$, mediatoarea laturii [AB] intersectează BC în N. Bisectoarea $\sphericalangle ABC$ intersectează AN în E, iar bisectoarea $\sphericalangle NAC$ intersectează BC în L. Demonstraţi că patrulaterul LEAC este trapez.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru: trei ore
Pentru fiecare problemă rezolvată correct se acordă 7 puncte.