INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 14.02.2014
Clasa a IX-a

1. (7p) Arătați că pentru orice număr natural nenul *n* este adevărată inegalitatea:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1$$

***

2. (7p) Rezolvați în **R** ecuația:

$$\{x\}+\{2x\}+\{3x\}=1,$$

unde prin $\{a\}$ s-a notat partea fractionară a numarului real *a*.

Petru Vlad

3. (7p) Determinați șirul de numere $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că:

$$a_n \in N^*,\ 1^2a_1+2^2a_2+...+n^2a_n=\frac{n^2(a_n+1)^2}{4},\ (\forall)\, n\in N^*.$$

GM11/2013

4. Se consideră *ABC* un triunghi și $D, E\in (BC)$, astfel încât $BD=DE=EC$. Se notează cu *M*, *N*, *Q* mijloacele laturilor *AB*, *AC*, *BC*.

(4p) a) Determinați $r\in$ **R** astfel încât $\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{EN}=r\,\overrightarrow{QA}$.

(3p) b) Daca G_1, G_2 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor *MND* și *MNE*, arătați că $G_1G_2 \parallel BC$.

Petru Vlad

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.

Barem de corectare OLM Clasa a IX-a, 2014

1. P(1): $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \triangleright 1 \Leftrightarrow \frac{13}{12} \triangleright 1$, inegalitate adevarata ....(**2p)**

$k \geq 1$, P(k) adevarată $\Rightarrow$ P(k+1): $\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4} \triangleright 1$..**(2p)**

Este suficient să arătăm că: $\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1} > 1$.................................**(1p)**

Finalizare..**(2p)**

2. $x = [x] + \{x\} \Rightarrow [x] + [2x] + [3x] = 6x-1$ ....**(2p)**

$6x-1 = k \in Z \Rightarrow x = \frac{k+1}{6}$ ....**(2p)**

Ecuatia devine $\left[\frac{k+1}{6}\right]+\left[\frac{k+1}{3}\right]+\left[\frac{k+1}{2}\right] = k$ ....**(1p)**

Se considera k de forma $6p$, $6p+1$, $6p+2$, ..., $6p+5$, $p \in \mathbf{Z}$ ș i se obț ine mulț imea soluț iilor $S = \left\{\frac{6p+1}{6}, \frac{6p+2}{6}, \frac{6p+3}{6}, \frac{6p+4}{6} \mid p \in Z\right\}$ ....**(2p)**

3. Pentru n=1 avem $a_1 = \frac{(a_1+1)^2}{4} \Leftrightarrow (a_1-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 1$ ....**(1p)**

Pentru n=2 avem $a_1 + 4a_2 = (a_2+1)^2 \Leftrightarrow a_2(a_2-2) = 0 \Rightarrow a_2 = 2$ ....**(1p)**

Demonstrăm prin inducț ie matematică $a_n = n, (\forall) n \in N^*$.

$k \geq 2$, $a_k = k$ ș i P(k+1): $1^2 a_1 + 2^2 a_2 + ... + k^2 a_k + (k+1)^2 a_{k+1} = \frac{(k+1)^2 (a_{k+1}+1)^2}{4} \Leftrightarrow$ ....**(1p)**

$\Leftrightarrow \frac{k^2 (a_k+1)^2}{4} + (k+1)^2 a_{k+1} = \frac{(k+1)^2 (a_{k+1}+1)^2}{4} \Leftrightarrow (a_{k+1}-k-1)(a_{k+1}+k-1) = 0$ ....**(2p)**

$\Rightarrow a_{k+1} = k+1$, de unde $a_n = n, (\forall) n \in N^*$ ....**(2p)**

4. a) Figura corectă ....**(1p)**

$\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{EN} = \frac{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}}{2}+\frac{\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}}{2} = -\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}}{2}$ ....**(1p)**

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AQ} = -2\overrightarrow{QA}$ ....**(1p)**

$\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{QA} \Rightarrow r = 1$ ....**(1p)**

b) I $MN \cap AQ = \{P\} \Rightarrow P$ este mijlocul lui $[MN]$ ....**(1p)**

$\frac{PG_1}{G_1D} = \frac{1}{2} = \frac{PG_2}{G_2E} \Rightarrow G_1G_2 \parallel DE \Rightarrow G_1G_2 \parallel BC$ ....**(2p)**

II. Fie P un punct oarecare $\Rightarrow \overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PD} = 3\overrightarrow{PG_1}, \overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PE} = 3\overrightarrow{PG_2}$ ....**(1p)**

$3\overrightarrow{G_2G_1} = 3(\overrightarrow{PG_1}-\overrightarrow{PG_2}) = \overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{ED} \Rightarrow G_1G_2 \parallel BC$ ....**(2p)**