

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 9 februarie 2013

Barem, clasa a XII-a

1. a) Facem substituția $t = \frac{1}{u} \Rightarrow dt = -\frac{1}{u^2} du$ și notând integrala cu I avem

$$I = -\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{u}}{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + 1} du = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{t}}{t^2 + t + 1} dt, \dots (1p), \text{ deci } 2I = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} \frac{1}{t}}{t^2 + t + 1} dt \dots (1p), \text{ iar folosind}$$

$$\text{identitatea } \operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}, \forall t > 0 \text{ obținem } I = \frac{\pi}{4} \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \Big|_{\frac{1}{x}}^x =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{2}{x}+1}{\sqrt{3}} \right) \dots (2p)$$

b) Fie $I(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2 + t + 1} dt = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2 + t + 1} dt + \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2 + t + 1} dt = I_1(x) + I_2(x), \forall x > 0 \dots (1p)$

$$I_1(x) = \frac{1}{x} \frac{\operatorname{arctg} c_x}{c_x^2 + c_x + 1} \quad \text{cu} \quad c_x \in \left(0, \frac{1}{x}\right), \quad \text{deci} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} I_1(x) = 0 \dots (1p). \quad \text{Atunci}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} I_2(x) \stackrel{\text{conf. a)}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{2}{x}+1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}} \dots (1p)$$

2. Observăm că $\frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^3} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}, \forall x > -1 \dots (1p).$

Notând integrala cu I avem

$$I = \int \frac{e^x \cos x}{x+1} dx - \int \frac{e^x \cos x}{(x+1)^2} dx + \int \frac{e^x \cos x}{(x+1)^3} dx = I_1 - I_2 + I_3 \dots (1p). \text{ In continuare aplicăm}$$

integrarea prin părți, astfel pentru I_1 luăm $f(x) = \frac{1}{x+1}, g(x) = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) \dots (2p)$, iar

pentru I_3 luăm $f(x) = e^x \cos x, g(x) = -\frac{1}{2(x+1)^2} \dots (2p)$. După aplicare se va reduce I_2 , deci

$$I = \frac{e^x (\cos x + \sin x)}{2(x+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{e^x (\cos x + \sin x)}{(x+1)^2} dx - I_2 - \frac{e^x \cos x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{e^x (\cos x - \sin x)}{(x+1)^2} dx =$$

$$= \frac{e^x (\cos x + \sin x)}{2(x+1)} - \frac{e^x \cos x}{2(x+1)^2} + C, C \in \mathbb{R}. \text{ Finalizare} \dots (1p).$$

3. a) Verificarea axiomelor grupului abelian. (3p)

b) Din f morfism avem $f(x+y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, iar prin inducție matematică se demonstrează relația (1) $\underbrace{f(x) \circ f(x) \circ \dots \circ f(x)}_{n \text{ ori}} = f(nx), \forall n \in \mathbb{N}^* \dots (1p)$. Aflarea

inversei funcției $f^{-1}: G \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \forall x \in G \dots (1p)$. Inlocuind x cu $f^{-1}(x)$ în

relația (1) se obține $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ ori}} = f(n f^{-1}(x)) = \frac{\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^n - \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^{-n}}{\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^n + \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^{-n}} \dots (1p)$. Finalizarea

problemei prin înlocuirea lui $n = 2013 \dots (1p)$.

4. a) Înlocuind $x = a$ în relație se obține $a^2 = e \Leftrightarrow a = a^{-1} \dots (1p)$, unde e este elementul neutru al grupului G . Relația din enunț devine (1) $x^3 = axa, \forall x \in G$. Înlocuind în (1) $x = ax \in G$ avem $(ax)^3 = a(ax)a \Leftrightarrow (ax)(ax)(ax) = aaxa \Leftrightarrow x(axa)x = axa \Leftrightarrow x \cdot x^3 \cdot x = x^3 \Leftrightarrow x^2 = e, \forall x \in G \Leftrightarrow G$ este grup comutativ. Finalizare... (2p)

b) Deoarece $(n, 2013) = 1$ atunci există $l, p \in \mathbb{Z}$ astfel încât $nl + 2013p = 1 \dots (1p)$. Atunci avem

$$xy = x^{nl+2013p} y^{nl+2013p} = (x^n)^l (x^p)^{2013} (y^n)^i (y^p)^{2013} \dots (1p)$$

Deoarece $\text{ord}G = n \Rightarrow x^n = e, \forall x \in G \dots (1p)$ atunci

$$xy = (x^p)^{2013} (y^p)^{2013} \stackrel{\text{ipoteza}}{=} (y^p)^{2013} (x^p)^{2013} = y^{2013p} (y^n)^i x^{2013p} (x^n)^p = y^{2013p+ni} x^{2013p+ni} = yx, \text{ deci}$$

grupul este comutativ... (1p)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 9 februarie 2013
CLASA a XII– a

1. a) Calculați $\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2 + t + 1} dt, x > 0.$

b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2 + t + 1} dt.$

(G.M. 6-7-8/2012)

2. Să se calculeze $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)^3} \cdot e^x \cos x dx, x > -1.$

Giurgi Vasile

3. Fie $G = (-1, 1)$ și aplicația $x \circ y = \frac{x + y}{1 + xy}, \forall x, y \in G$, iar $f: \mathbb{R} \rightarrow G, f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$

a) Arătați că (G, \circ) este grup abelian.

b) Admitem că f este un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și (G, \circ) să se calculeze $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } 2013 \text{ ori}}, \text{ unde } x \in G.$

4. a) Fie (G, \cdot) un grup cu proprietatea că există $a \in G$ astfel încât $ax = x^3 a, \forall x \in G.$ Să se demonstreze că (G, \cdot) este un grup abelian.

b) Fie (G, \cdot) un grup finit de ordin $n > 2$ cu $(n, 2013) = 1.$ Să se arate că, dacă $x^{2013} y^{2013} = y^{2013} x^{2013}, \forall x, y \in G,$ atunci grupul (G, \cdot) este comutativ.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Subiectele au fost propuse și selectate de către:

prof. Tomoiagă Ioan, Colegiul Național „Dragoș Vodă”, Sighetu Marmației.

prof. Giurgi Vasile, Colegiul Național „Dragoș Vodă”, Sighetu Marmației.

SUCCES!