OLIMPIADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

CLASA A VI-A

1.) Comparaţi numerele *a* şi *b*, dacă $a = \frac{2^{2014}}{10^{2017}} \cdot 25^{1007}$ şi

$b = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{2014}\right)$.

2.) Determinaţi numărul de fracţii ireductibile din mulţimea

$A = \left\{\frac{1}{2015}; \frac{2}{2015}; \frac{3}{2015}; ...; \frac{2014}{2015}\right\}$.

3.) Se dă unghiul *AOB* cu măsura de 130°. Se duce semidreapta *(OC* opusă lui *(OA* şi $OD \perp OA$, astfel încât *(OB* şi *(OD* să fie în semiplane diferite faţă de *AC*. În acelaşi semiplan cu (OD se duce $OE \perp OB$. Calculaţi:

a.) $m\left(\widehat{BOC}\right)$, $m\left(\widehat{DOE}\right)$ şi $m\left(\widehat{COE}\right)$

b.) măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor *AOB* şi *COE*.

4.) Fie $\triangle ABC$ un triunghi oarecare, cu $AB < AC$; $(AD$ bisectoare interioară, $D \in (BC)$ şi $(AM$ bisectoare exterioară, $M \in (CB$. Se consideră punctul $N \in (MA$ astfel, încât $(AM) \equiv (AN)$ şi fie $DN \cap AC = \{E\}$. Arătaţi, că:

a.) $\triangle ADM \equiv \triangle ADN$;

b.) $\triangle ABM \equiv \triangle AEN$;

c.) $EMA \equiv BNA$;

d.) $AD \perp BE$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

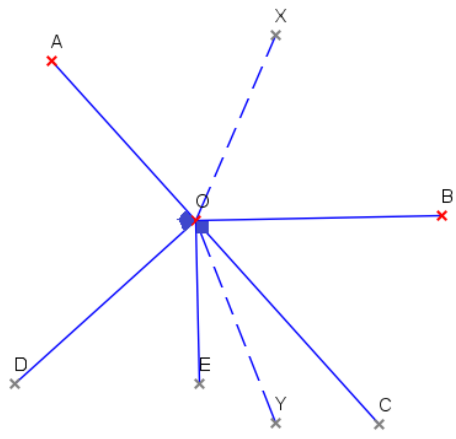
Timp de lucru 2 ore

OLIMPADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALĂ
23 februarie 2014

BAREM
CLASA A VI-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	$a=\dfrac{2^{2014}}{10^{2017}}\cdot 25^{1007}=\dfrac{2^{2014}}{2^{2017}\cdot 5^{2017}}\cdot 5^{2014}=\dfrac{1}{1000}$	**4p**
	$b=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{2014}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdots\dfrac{2013}{2014}=\dfrac{1}{2014}$	**4p**
	a > b	**1p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	Avem 2015= 5·13·31	**1p**
	Între 1 şi 2014 sunt 402 multipli de 5	**1p**
	Între 1 şi 2014 sunt 154 multipli de13	**1p**
	Între 1 şi 2014 sunt 64 multipli de 31	**1p**
	Nr. numerelor divizibile şi cu 5 şi cu 13 sunt 30	**1p**
	Nr. numerelor divizibile şi cu 5 şi cu 31 sunt 12	**1p**
	Nr. numerelor divizibile şi cu 13 şi cu 31 sunt 4	**1p**
	Vor fi deci 402+154+64-(30+12+4)= 620-46=574 fracţii reductibile	**1p**
	Din cele 2014 fracţii rămân 2014-574= 1440 fracţii ireductibile	**1p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
a)		**1p**
	$DO\perp AO\Rightarrow m\left(\widehat{AOD}\right)=90°,\quad OE\perp OB\Rightarrow m\left(\widehat{BOE}\right)=90°$	**3p**
	$m\left(\widehat{AOC}\right)=180°\Rightarrow m\left(\widehat{BOC}\right)=180°-m\left(\widehat{AOB}\right)=180°-130°=50°$	
	$m\left(\widehat{EOC}\right)=m\left(\widehat{EOB}\right)-m\left(\widehat{BOC}\right)\Rightarrow m\left(\widehat{EOC}\right)=40°$	**3p**
	$m\left(\widehat{DOE}\right)=m\left(\widehat{AOC}\right)-\left[m\left(\widehat{AOD}\right)+m\left(\widehat{EOC}\right)\right]\Rightarrow m\left(\widehat{DOE}\right)=50°$	

b)	$m\left(\hat{XOY}\right)=\frac{m\left(\hat{AOB}\right)}{2}+m\left(\hat{BOC}\right)+\frac{m\left(\hat{EOC}\right)}{2}\Rightarrow m\left(\hat{XOY}\right)=135^\circ$	**2p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
a)	Elaborarea desenului	**1p**
	$m\left(DAM\sphericalangle\right)=180^\circ:2=90^\circ=m\left(DAN\sphericalangle\right)$	**1p**
	Triunghiurile dreptunghice ADM şi ADN au câte două catete congruente	**1p**
b)	$\left.\begin{array}{l} MAB\sphericalangle\equiv NAE\sphericalangle \\ \left(AM\right)\equiv\left(AN\right) \\ \hat{M}\equiv\hat{N}\ (a)\end{array}\right\}\xrightarrow{U.L.U.}{}_{\Delta}ABM\equiv{}_{\Delta}AEN$	**2p**
c)	$\left.\begin{array}{l} EAM\sphericalangle\equiv BAN\sphericalangle \\ \left(EA\right)\equiv\left(BA\right)(b)) \\ \left(AM\right)\equiv\left(AN\right)\end{array}\right\}\xrightarrow{L.U.L.}{}_{\Delta}AEM\equiv{}_{\Delta}ABN\Rightarrow EMA\sphericalangle\equiv BNA\sphericalangle$	**2p**
d)	${}_{\Delta}ABE$ isoscel, $\left(AD\right.$ bisectoare $\Rightarrow\left(AD\right.$ înălţime $\Leftrightarrow AD\perp BE$	**2p**