OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
21 februarie 2016

Clasa a X-a

1. a) Se consideră $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție strict concavă. Să se arate că nu există patru puncte pe graficul funcției f care să formeze un paralelogram.

b)Să se arate că:

$$\left(\frac{\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^3 \leq \frac{\lambda_1 \cdot {x_1}^3 + \lambda_2 \cdot {x_2}^3}{\lambda_1 + \lambda_2}, \forall\, x_1, x_2 \in [0, \infty), \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty).$$

Generalizați inegalitatea.

2. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi numerele $z_1, z_2, \dots z_n \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = 1 \text{ şi } z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0.$$

a) Arătaţi că: $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \cdots + |z - z_n|^2 = n|z|^2 + n,\ \forall\, z$ număr complex.

b) Demonstraţi că:

$|z - z_1| + |z - z_2| + \cdots + |z - z_n| \leq n\sqrt{2},$ pentru orice $z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1.$

3. Fie $\boldsymbol{A}$ și $\boldsymbol{B}$ imaginile soluțiilor ecuației: $\boldsymbol{z^2 - 13z + 72 + 30i = 0}$.

a) Să se calculeze aria triunghiului $\boldsymbol{AOB}$, unde $\boldsymbol{O}$ este originea planului complex.

b) Cât la sută din suprafața triunghiului $\boldsymbol{AOB}$ acoperă mulțimea soluțiilor inecuației $\boldsymbol{|z| \leq 4}$?

4.a) Să se rezolve ecuația: $3^x = 2^x + 1$.

b) Să se rezolve în $(1, \infty)$ecuația:

$x^{\log_3 2} + 1 = (x - 1)^{\log_2 3}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii;
Timp de lucru: 3 ore.

Soluţii clasa aX-a:

1.a) Să presupunem că graficul funcției f conține patru puncte A, B, C, D care formează un paralelogram. Coordonatele punctelor sunt: $A(a, f(a)), B(b, f(b)), C(c, f(c)), D(d, f(d))$. Cum $ABCD$ paralelogram, au loc relațiile: $a + c = b + d, f(a) + f(c) = f(b) + f(d)$, cu $a < b < d < c$ și relații analoage. Atunci din $b \in (a, c) \Longrightarrow \exists\, \lambda \in (0,1)$ astfel încât $b = \lambda \cdot a + (1-\lambda) \cdot c$ (1). Cum f este strict concavă, rezultă $f(b) > \lambda \cdot f(a) + (1-\lambda) \cdot f(c)$ (2). Analog, există $\eta \in (0,1)$ astfel încât $d = \eta \cdot a + (1-\eta) \cdot c$ (3) și $f(d) > \eta \cdot f(a) + (1-\eta) \cdot f(c)$ (4). Adunând relațiile (2), (4), obținem:
$f(b) + f(d) > (\lambda + \eta) \cdot f(a) + (2 - \lambda - \eta) \cdot f(c)$ $(*)$, iar din (1), (3) rezultă că $b + d = (\lambda + \eta) \cdot a + (2 - \lambda - \eta) \cdot c = a + c$, de unde
$(\lambda + \eta - 1) \cdot (c - a) = 0$. Cum$a \neq c \Longrightarrow \lambda + \eta = 1$, atunci relația (*) devine :$f(b) + f(d) > f(a) + f(c)$. Așadar nu există patru puncte pe graficul funcției care să formeze un paralelogram.
b) Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ este convexă pentru $[0, \infty)$ (interval), atunci are loc inegalitatea:

$$f\left(\frac{\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) \leq \frac{\lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2)}{\lambda_1 + \lambda_2},$$
$$\forall\, x_1, x_2 \in [0, \infty), \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty) \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^3 \leq \frac{\lambda_1 \cdot x_1{}^3 + \lambda_1 \cdot x_2{}^3}{\lambda_1 + \lambda_2}, \forall\, x_1, x_2 \in [0, \infty), \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty).$$

Generalizarea inegalității:

$$\left(\frac{\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}\right)^3 \leq \frac{\lambda_1 \cdot x_1{}^3 + \lambda_2 \cdot x_2{}^3 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n{}^3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n},$$
$$\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, \infty), \forall\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0, \infty).$$

2.a)$|z - z_i|^2 = (z - z_i)(\bar{z} - \overline{z_i}) = |z|^2 - z\overline{z_i} - z_i\bar{z} + |z_i|^2 =$
$= |z|^2 + 1 - (z\overline{z_i} + z_i\bar{z}), i = \overline{1, n}$.
Atunci :$|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \cdots + |z - z_n|^2 = n|z|^2 + n -$
$-(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)\bar{z} - z\overline{(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)} = n|z|^2 + n.$
b) Aplicăm inegalitatea Cauchy- Buniakowski-Schwartz:

$$(|z - z_1| \cdot 1 + |z - z_2| \cdot 1 + \cdots + |z - z_n| \cdot 1)^2$$
$$\leq (|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \cdots + |z - z_n|^2) \cdot n$$
$$= n^2(|z|^2 + 1) \leq 2n^2 \Longrightarrow |z - z_1| + |z - z_2| + \cdots + |z - z_n| \leq n\sqrt{2}.$$

sau

b) Folosind inegalitatea mediilor obținem:
$\frac{|z - z_1| + |z - z_2| + \ldots + |z - z_n|}{n} \leq \sqrt{\frac{|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \ldots + |z - z_n|^2}{n}}, (\forall) z \in \mathbb{C}$
$\Longrightarrow |z - z_1| + |z - z_2| + \ldots + |z - z_n| \leq n\sqrt{\frac{n|z|^2 + n}{n}} \leq n\sqrt{\frac{n + n}{n}} = n\sqrt{2},$
$(\forall) z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1.$
3.a)$\Delta = (5 - 12\mathrm{i})^2$, de unde $z_1 = 9 - 6i, z_2 = 4 + 6i$.
Atunci $AB = |z_1 - z_2| = 13, AO = |z_1| = 3\sqrt{13}, BO = |z_2| = 2\sqrt{13}$
Se observă că $OA^2 + OB^2 = AB^2$, deci ΔAOB este dreptunghic cu unghiul drept în O, iar aria triunghiului este:

$$A_{\Delta AOB} = \frac{AO \cdot BO}{2} = 39.$$

b) Deoarece ΔAOB este dreptunghic cu unghiul drept în O rezultă că un sfert din cercul ce constituie reprezentarea grafică a inecuației$|\boldsymbol{z}| \leq \mathbf{4}$ acoperă triunghiul.

$$A_{sect} = \frac{16\pi}{4} = 4\pi \cong 12{,}56 \cong 32{,}2\% A_{\Delta AOB}.$$

4.a)$3^x = 2^x + 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1.$

Se observă că $x = 1$ este soluție a ecuației. Arătăm că această soluție este unică.

Funcția $g: \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty), g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$, este strict descrescătoare, deci injectivă şi atunci soluţia unică este $x = 1$.

b)$x^{\log_3 2} = 2^{\log_3 x}$şi $(x-1)^{\log_2 3} = 3^{\log_2 (x-1)}$.

Notăm $a = \log_3 x$ şi $b = \log_2(x-1) \Rightarrow x = 3^a$şi $x = 2^b + 1$,

De aici obţinem: $3^a = 2^b + 1$.

Ecuaţia dată este echivalentă cu: $2^a + 1 = 3^b$.

Din cele două relaţii, obţinem:

$$3^a - 2^b = 3^b - 2^a \Leftrightarrow 3^a + 2^a = 3^b + 2^b.$$

Considerăm funcţia: $f: \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty),\ f(x) = 3^x + 2^x$, care este strict crescătoare şi deci este şi injectivă, rezultă $a = b$.

Atunci:$3^a = 2^a + 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^a + \left(\frac{1}{3}\right)^a = 1.$

Funcția $g: \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty), g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$, este strict descrescătoare, deci injectivă şi atunci soluţia unică este $a = 1 \Rightarrow x = 3$.