OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
28 februarie 2015

CLASA A XII-A

1.) **a)** Pe mulţimea $\mathbb{N}^*$ definim operaţia "$\circ$" astfel: $a \circ b = c =$ cel mai mare număr natural pentru care există triunghi cu lungimile laturilor a, b, c . Să se studieze proprietăţile operaţiei "$\circ$" (asociativitate, comutativitate, element neutru, elemente simetrizabile).

b) Pe mulţimea $H = \{1,2,3,4,5\}$ definim operaţia "$*$" astfel: $a * b = c =$ cel mai mic număr natural pentru care există triunghi cu lungimile laturilor a, b, c . Să se efectueze tabela operației.

2.) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x + x$.

a) Să se arate că funcţia *f* este bijectivă şi să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

b) Dacă $x_0 = f^{-1}(0)$ arătaţi că $(G, *)$ este un grup abelian, unde $G = \mathbb{R} / \{x_0\}$, și

$x * y = f^{-1}\left(2 f(x) \cdot f(y)\right),\ \forall x, y \in G$

3.) Se consideră funcţia $f : R \to R,\ f(x) = \left(4x^3 - 6x^2 + 6x - 2\right)\operatorname{arctg}\left(x^2 - x + 1\right)$. Să se determine acea primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funcției f al cărei grafic trece prin punctul $A(1,\ 0)$.

4.) Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $f(0) = 1$ și există $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitivă a funcţiei f astfel încât $F(x) - f(x) = \sin^2 x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

28 februarie 2015

BAREM

CLASA A XII-A

<table>
<tr><td>1.)</td><td>Din oficiu</td><td>1p</td></tr>
<tr><td rowspan="3">a)</td><td>Dacă există triunghi cu laturile a, b, c atunci $a+b>c$. Însă $c\in N^{*}$ este cel mai mare număr natural cu această proprietate, deci $c=a+b-1$, adică $a\circ b=a+b-1$.</td><td>2p</td></tr>
<tr><td>Operaţia este asociativă, comutativă, elementul neutru este $e=1\in N^{*}$</td><td>2p</td></tr>
<tr><td>$a\circ a`=a`\circ a=1$ implică $a+a`-1=1$, deci $a`=2-a$. Însă $a`\in N^{*}$, deci numai $a=1$ este simetrizabil şi simetricul coincide cu 1.</td><td>2p</td></tr>
<tr><td rowspan="2">b)</td><td>Dacă există triunghi cu laturile a, b, c astfel încât c este cel mai mic număr natural cu această proprietate atunci $|a-b|<c$, deci $c=|a-b|+1$.</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>Tabela operației:
<table>
<tr><td>*</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr>
</table></td><td>2p</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2.)</td><td>Din oficiu</td><td>1p</td></tr>
<tr><td rowspan="4">a)</td><td>Din $f^{'}(x)=e^{x}+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ rezultă că f este strict crescătoare deci este injectivă</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>Cum funcţia f este continuă, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ rezultă că este surjectivă</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>f fiind bijectivă admite inversa f^{-1} şi avem $\left(f^{-1}\right)^{'}(y_0)=\dfrac{1}{f^{'}(x_0)}$, unde $f(x_0)=y_0$</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>Cum $f(0)=1$ avem $\left(f^{-1}\right)^{'}(1)=\dfrac{1}{f^{'}(0)}=\dfrac{1}{2}$</td><td>1p</td></tr>
<tr><td rowspan="5">b)</td><td>Fie $x,y\in G\Rightarrow x\neq x_0,\ y\neq x_0$ și presupunând că $x*y=x_0$ avem
$x*y=x_0\Rightarrow f^{-1}\left(2f(x)\cdot f(y)\right)=f^{-1}(0)\Rightarrow 2f(x)\cdot f(y)=0$ de unde obținem
$f(x)=0$ sau $f(y)=0$ de unde $x=x_0$ sau $y=x_0$ contradicție, deci
$x*y\neq x_0\Rightarrow x*y\in G$, adică mulţimea G este parte stabile a mulțimii $\mathbb{R}$ față de ”$*$”</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>$\forall x,y,z\in G,(x*y)*z=x*(y*z)=f^{-1}\left(4f(x)f(y)f(z)\right)\Rightarrow$ "$*$" asociativă</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>$\forall x,y\in G, x*y=y*x=f^{-1}\left(2f(x)f(y)\right)\Rightarrow$ "$*$" comutativă</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>$\exists e\in G$ astfel încât $x*e=x,\ \forall x\in G$, $e=f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ element neutru</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>$\forall x\in G,\ \exists x^{'}\in G$ astfel încât $x*x^{'}=e$, $x^{'}=f^{-1}\left(\dfrac{1}{4f(x)}\right)$ element simetric
Rezultă că $(G,*)$ este un grup abelian</td><td>1p</td></tr>
</table>

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	Cum $\left(\operatorname{arctg}\left(x^2-x+1\right)\right)'=\dfrac{2x-1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+2}$ și $\left(x^4-2x^3+3x^2-2x+2\right)'=4x^3-6x^2+6x-2$ avem	**2p**
	$F(x)=\int\left(4x^3-6x^2+6x-2\right)\operatorname{arctg}\left(x^2-x+1\right)dx=$ $=\int\left(x^4-2x^3+3x^2-2x+2\right)'\operatorname{arctg}\left(x^2-x+1\right)dx=$	**1p**
	$=\left(x^4-2x^3+3x^2-2x+2\right)\operatorname{arctg}\left(x^2-x+1\right)-\int(2x-1)dx=$	**2p**
	$=\left(x^4-2x^3+3x^2-2x+2\right)\operatorname{arctg}\left(x^2-x+1\right)-x^2+x+C$	**2p**
	Deorece $A(1,0)\in G_F$, rezultă că $F(1)=0$, adică $2\cdot\dfrac{\pi}{4}+C=0$, deci $C=-\dfrac{\pi}{2}$. Rezultă că $F(x)=\left(x^4-2x^3+3x^2-2x+2\right)\operatorname{arctg}\left(x^2-x+1\right)-x^2+x-\dfrac{\pi}{2}$.	**2p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	Cum F este o primitive a funcţiei f rezultă că F este derivabilă și $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$	**1p**
	Înmulţind cu e^{-x} relația $F(x)-f(x)=\sin^2 x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ se obține $e^{-x}F(x)-e^{-x}f(x)=e^{-x}\sin^2 x,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(e^{-x}F(x)\right)'=-e^{-x}\sin^2 x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ de unde $e^{-x}F(x)=\int -e^{-x}\sin^2 x\,dx$	**2p**
	Utilizând metoda integrării prin părţi obținem: $\int e^{-x}\sin^2 x\,dx=-e^{-x}\sin^2 x-\dfrac{e^{-x}}{5}(\sin 2x+2\cos 2x)$	**2p**
	Avem $e^{-x}F(x)=e^{-x}\sin^2 x+\dfrac{e^{-x}}{5}(\sin 2x+2\cos 2x)+\mathbb{C}$ de unde se obţine $F(x)=\sin^2 x+\dfrac{1}{5}(\sin 2x+2\cos 2x)+\mathbb{C}e^x$	**2p**
	Din $f(0)=1$ se obţine $F(0)=1$ și $\mathbb{C}=\dfrac{3}{5}$	**1p**
	Cum din ipoteză avem $f(x)=F(x)-\sin^2 x,\ \forall x\in\mathbb{R}$, obţinem $f(x)=\dfrac{1}{5}\left(\sin 2x+2\cos 2x+3e^x\right),\forall x\in\mathbb{R}$	**1p**